11, 70

Adem HUSKIĆ

ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE

za 2. razred gimnazije i drugih srednjih škola

IP "SVJETLOST" d.d.

Izdavač: IP "SVJETLOST", d.d.
Zavod za udžbenike i nastavna sredstva

Direktor: Šefik ZUPČEVIĆ

Za izdavača: Abduselam RUSTEMPAŠIĆ

Urednik: Ante BANIĆ

Recenzenti: Prof. dr. Šefket ARSLANAGIĆ, Sarajevo
Abdulah Hodžić, Tuzla
Nura HUSKIĆ, Sarajevo

Lektor: Dragoslav VLAJKOVIĆ

Korektor: Autor

Tehnički urednik: Vanda BABOVIĆ

Naslovna strana: Mira GOGIĆ

DTP: Autor

Štampa: BEMUST, Sarajevo

Tiraž: 2000

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka
Bosne i Hercegovine, Sarajevo

51(075.3) (076.1/.2)

HUSKIĆ Adem
Zbirka zadataka iz matematike za 2. razred gimnazije i drugih srednjih škola / Adem Huskić. - Sarajevo : Svjetlost, 2005. - 284 str. : graf. prikazi ; 24 cm

ISBN 9958-10-711-2

COBISS.BH-ID 14318342

PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka je namijenjena učenicima drugog razreda srednjih škola. Zadaci su birani tako da pokrivaju oblasti koje se kod nas izučavaju u drugom razredu skoro svih tipova ovih škola. Namjera nam je da zadaci svojom težinom zadovolje interesovanja i zahtjeve svih učenika. Početni zadaci u svakom poglavlju su jednostavni i zahtijevaju samo neposredno računanje, uvrštavanje i slično, a zatim slijede zadaci koji traže nešto veće napore i na kraju su zadaci za čije uspješno rješavanje je potrebno kako obuhvatnije poznavanje određene oblasti, tako i određen stepen uvježbanosti. Mada je teško zadatke rangirati po težini (zbog velikog broja vrsta srednjih škole i razlika u programima matematike), u zbirci su "teži" zadaci, po mojoj procjeni, označeni zvjezdicom pored oznake broja zadatka.

Zadaci su navedeni u prvom dijelu zbirke, a u drugom dijelu data su rješenja, upute ili samo rezultati. Za veliki broj zadataka u zbirci je dato kompletno rješenje. To se posebno odnosi na "teže" zadatke. Za pojedine zadatke date su samo upute u cilju usmjeravanja pažnje rješavatelja.

Na početku svakog poglavlja navedene su osnovne formule, definicije, teoreme i tabele kako bi se olakšalo korištenje zbirke i omogućilo rješavanje zadataka i bez drugih udžbenika i priručnika.

U oblasti logaritmi i logaritamska funkcija i trigonometrija, kada treba odrediti logaritam datog broja, prirodnu vrijednost trigonometrijske funkcije nekog broja (ugla), ili broj ako mu je poznat logaritam, ili broj (ugao) kada je poznata vrijednost trigonometrijske funkcije, preporučuje se upotreba kalkulatora koji raspolaže sa odgovarajućim funkcijama. Naravno, i dalje se može koristiti i priručnik "logaritamske tablice", ali bi korištenje kalkulatora dalo poseban pečat pri rješavanju odgovarajućih zadataka.

Nadam se da će Zbirka biti od koristi učenicima koji traže nešto više od onoga što nalaze u samim udžbenicima matematike za drugi razred, i omogućiti kompletno utvrđivanje, ponavljanje i samostalno vježbanje.

Kako se trigonometrija izučava u drugom i trećem razredu srednje škole, ovom zbirkom je obuhvaćen samo dio do adicionih teorema.

Na kraju želim posebnu zahvalnost izraziti recenzentima koji su svojim primjedbama i prijedlozima uticali na poboljšanje kvaliteta zbirke.

1. STEPENI (POTENCIJE) i KORIJENI

Osnovne formule i definicije:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ faktora}}, \quad (n \in N).$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, (a \neq 0)$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$; $a^0 = 1, (a \neq 0)$

Za a>0, b>0 i proizvoljan prirodan broj n vrijedi:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad (n \neq 0)$; $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Za a<0, b<0 i paran prirodan broj n (n=2k, k∈N) vrijedi:

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$

Ako je n neparan broj (n=2k+1, k∈N), a i b realni brojevi, vrijedi:

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad (b \neq 0)$.

Ako su m i n cijeli brojevi i n≠0, tada vrijedi: $\sqrt[2n]{a^{2m}} = \sqrt[n]{|a|^m}$.

1.1. STEPENI SA PRIRODNIM IZLOŽIOCEM (EKSPONENTOM)

Izračunati vrijednost stepena:

1.1.a) 2^4 b) 5^2 c) $(-2)^2$ d) 10^3 **1.2.**a) 2^5 b) $(-2)^4$ c) -3^4 d) -5^2

1.3.a) $(-1)^7$ b) $(-10)^3$ c) 5^4 d) 2^{10} **1.4.**a) $(-1)^5+(-1)^4-(-1)^7$

b) $(-2)^3+(-2)^2+(-2)^4$ c) $2(-1)^3+4(-2)^2-(-1)^5$

1.5.a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ b) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ c) $\left(\frac{4}{7}\right)^1$ d) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

1.6.a) $(-2)(-3)(-4)^2-(-1)^3(-2)^2$ b) $(-3)(-1)^2(-4)^3-(-1)^3(-2)^3$

Reduciraj izraz (izvršavajući operacije sa sličnim monomima):

1.7.a) $5a^4-5a^2+4a^4+7a^2$ b) $3x^4+5a^3-4a^3+3x^4$ c) $7x^6-5x^3+4x^6-3x^3$

d) $11x^7-11x^8+10x^8-5x^7$ e) $-2x^3+5a^2-4a^2+3x^3$ f) $5a^4-2a^3+6a^3-2a^4$

1.8.a) $4a^2+3a-5a^3+a^2-2a+7a^3$ b) $11a^4-11a^3+5a-7a^2+5a^3-4a^2$

c) $a^4+11a^4+5a+7a^2+5a-5a^2$ d) $3a^5+11a^2-a^4+2a^5+3a^4-8a^2+4$

Pomnožiti stepene:

1.9.a) $4^4\cdot 4^2$ b) $3^{12}\cdot 3^5$ c) $7^{12}\cdot 7^1$ d) $2^{12}\cdot 2^2$

1.10.a) $5^3\cdot 5^2$ b) $3^4\cdot 3^5\cdot 3^3$ c) $7^{12}\cdot 7^5\cdot 7^2$ d) $2^7\cdot 2^{13}\cdot 2^3$

1.11.a) $\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4$ c) $\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\frac{1}{2}$

1.12.a) $2^3\cdot 2^5\cdot 2^2$ b) $4\cdot 4^3\cdot 4^6$ c) $a^3\cdot a^5\cdot a^{11}$ d) $b\cdot b^6\cdot b^4\cdot b^3$

Odredi količnike stepena:

1.13.a) $8^4:8^3$ b) $10^{15}:10^{10}$ c) $a^{13}:a^{10}$ d) $b^{17}:b^{15}$

1.14.a) $\frac{4^4}{4^3}$ b) $\frac{5^{10}}{5^6}$ c) $\frac{2^8}{2^4}$ d) $\frac{10^{14}}{10^{15}}$ **1.15.**a) $\frac{a^{20}}{a^{15}}$ b) $\frac{x^{11}}{x^8}$ c) $\frac{y^{16}}{y^{10}}$ d) $\frac{b^7}{b}$

Izračunati vrijednost izraza (stepenuj stepen):

1.16.a) $(2^3)^2$ b) $(3^4)^2$ c) $(5^2)^3$ d) $(-1^3)^2$

1.17.a) $(-3^2)^3$ b) $[(-3)^4]^2$ c) $[(-5)^2]^4$ d) $[(-1)^3]^{22}$

1.18.a) $(x^3)^3$ b) $(a^4)^{12}$ c) $(b^{21})^3$ d) $(y^3)^4$

1.19.a) $(a^4)^5$ b) $(x^2)^3$ c) $(b^2)^7$ d) $(y^{30})^4$

1.20.a) $[(a-3)^2]^5$ b) $[(b+1)^3]^2$ c) $[-(-5)^2]^4$ d) $[-(-1)^3]^{22}$

1.21. Izračunati vrijednost izraza x^5-2x^2+16, za $x=0$ i za $x=1$.

1.22. Izračunati vrijednost izraza $5y^3-2y^2+3y-11$, za $y=0$ i za $y=-1$.

1.23. Izračunati vrijednost izraza $5x^3-2x^2+6x-2$, za $x=-2$.

1.24. Izračunati vrijednost izraza $6a^7+3a^4-8a^{45}+4$, za $a=-1$.

1.25. Izračunati vrijednost izraza $2ax^3-a^2x^2+3ax+10$, za $a=-1$, $x=2$.

1.26.* Odrediti vrijednost izraza:

$$\left(\frac{a^2-ab}{a^2b+b^3}-\frac{2a^2}{b^3-ab^2+a^2b-a^3}\right)\cdot\left(1-\frac{b-1}{a}-\frac{b}{a^2}\right) \text{ za } a=-\frac{2}{5},\ b=0{,}12$$

Izvršiti naznačene operacije:

1.27.a) $(x^3)^5\cdot(x^7)^2$ b) $(a^2)^6\cdot(a^4)^3$ c) $(x^5)^4\cdot(x^6)^2$ d) $(x^4)^3\cdot(x^2)^6x^3$

1.28.a) $(x^3)^5:(x^7)^2$ b) $(a^3)^6:(a^4)^3$ c) $(x^5)^4:(x^6)^2$ d) $(x^5)^3:(x^2)^6$

1.29.a) $a^3\cdot a^5:a^6$ b) $a^7\cdot a^3:a^4$ c) $x^{11}\cdot x^{11}:x^{13}$ d) $x^4\cdot x^{21}:x^{14}$

1.30.a) $a^m\cdot a^n:a^{2m}$ b) $a^{3m}\cdot a^3:a^{2m}$ c) $x\cdot x^{4m}:x^{13m}$ d) $(a^x+a^{x+2})\cdot a^4$

1.31.a) $a^mx^n\cdot a^{m+2}x^{7n+1}$ b) $a^{m+3}y^{n+1}\cdot a^{m+1}y^{n+5}$ c) $x^{11m-1}x^{m+4}:x^{m-1}$

1.32.a) $a^x(a^{x+1}+a^x)-a^{x+2}(a^{x+3}-a^x)$ b) $x^m(x^{m+3}-x^m)+x^{m+4}(x^{m+1}+x^{m+2})$

1.33.a) $\frac{a^7+2ab}{a}$ b) $\frac{x^{10}-5a^2x^4}{x^3}$ c) $\frac{b-5b^2x^4}{b}$

1.34.a) $5^3\cdot 2^3$ b) $4^2\cdot 2^2$ c) $50^3\cdot 2^3$ d) $2^5\cdot 5^5$

1.35.a) $\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3$ b) $\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^2$ c) $\left(\frac{6}{11}\right)^3\cdot\left(\frac{22}{3}\right)^3$

1.36.a) $18^5:9^5$ b) $20^2:5^2$ c) $12^6:4^6$ d) $33^5:11^5$

1.37.a) $(a^3)^2\cdot(a^2)^4:(a^4)^3$ b) $(x-a)^{3+n}\cdot(x-a)^{3n+1}$ c) $a^{2x+3}:a^{2x+1}:a^x$

1.38.a) $a^{2x+3}:(a^{2x+1}:a^x)$ b) $(a^{x+3}):(a^3)^{2x-1}\cdot a^{5x-3}$ c) $(-x^n)^{2n}:(-x^n)^{2n+1}$

1.39.a) $(ax^{2m}+8x^{2n}):x^{m+n}$ b) $(a^{2n}-b^{2n}):(a^n-b^n)$ c) $(a^{2n}-b^{2n}):(a^n+b^n)$

Dati izraz napisati u obliku stepena sa izložiocem x:

1.40.a) $30^x\cdot 5^x:6^x$ b) $10^x\cdot 5^x:2^x$ c) $20^x\cdot 4^x:5^x$

1.41. Izračunati vrijednost datog izraza:

a) $\frac{2\cdot 5^{22}-9\cdot 5^{21}}{25^{10}}$ b) $\frac{5(3\cdot 7^{15}-19\cdot 7^{14})}{7^{16}+3\cdot 7^{15}}$ c) $\frac{10(8^{35}-5\cdot 8^{34})}{8^{35}-2\cdot 8^{34}}$

1.42.a) $\frac{2\cdot 3^{22}-7\cdot 3^{21}}{19\cdot 27^4}$ b) $\frac{10\cdot(2^n-5\cdot 2^{n-1})}{6\cdot 2^{n+1}+3\cdot 2^n}$ c) $\frac{17\cdot(3\cdot 10^{15}-23\cdot 100^7)}{100^8-66\cdot 10^{14}}$

Izvršiti naznačene operacije i uprostiti izraz:

1.43.a) $\frac{2cd^4}{3ab}\cdot\frac{4a^7b^4}{5c^4d^3}\cdot\frac{15bc^3}{8a^6d^2}$ b) $\frac{4a^2b^2}{9x^2y^2}\cdot\frac{27x^3}{8a^3}\cdot\frac{y^4}{b^4}$

1.44.a) $\left(\frac{m+n}{a+b}\right)^3\cdot\left(\frac{n-m}{a-b}\right)^3\cdot\left(\frac{a^2-b^2}{m^2-n^2}\right)^2$ b) $\left(\frac{9x^2-1}{4a^2-1}\right)^n\cdot\left(\frac{2a+1}{3x-1}\right)^n\cdot\left(\frac{2a-1}{3x+1}\right)^n$

1.45. $$\left[\left(\frac{mnp}{a+b}\right)^4:\left(\frac{m^2n^2}{a^3b^2}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\frac{a^3b^4c}{mp^3}\right)^6:\left(\frac{a^5b^8c^2}{m^2p^5}\right)^3\right]$$

1.2. STEPENI SA CIJELIM IZLOŽIOCEM (EKSPONENTOM)

Izračunati vrijednosti stepena:

1.46.a) 5^0 b) 35^0 c) $(-43)^0$ d) -8^0

1.47.a) $-(-2)^0$ b) $(475+1257-4,123)^0$ c) $-(2000-45,11+887,23)^0$

1.48.a) 3^{-2} b) 4^{-1} c) 10^{-2} d) $(-1)^{-2}$

1.49.a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$ b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$ c) $\left(\frac{8}{9}\right)^{-1}$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$

1.50.a) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}$ c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-k}$ d) $\left(\frac{m}{n}\right)^{-p}$

1.51.a) $(-0,1)^{-4}$ b) $-0,25^{-2}$ c) $-(0,2)^{-2}$ d) $(-0,1)^{-3}$

U sljedećim zadacima sve izraze napisati u obliku u kojem neće sadržavati u eksponentu nulu ili negativan broj:

1.52.a) $5^{-1}\cdot a^{-2}\cdot c^{-4}$ b) $(m+n)^0\cdot(m-n)^{-2}$ c) $7^{-3}\cdot a^{-4}\cdot b^{-5}$

1.53.a) $\frac{xy^{-2}}{a^0}$ b) $\frac{2a^{-1}}{b^{-3}}$ c) $\frac{4a^{-3}b^{-1}}{7a^{-5}b^{-4}}$ d) $\frac{8x^{-2}b^{-4}}{4x^{-3}b^{-6}}$

1.54.a) $\frac{54x^5y^{-1}z^{-4}}{42x^{-1}y^{-8}z^{-5}}$ b) $\frac{19^{-1}a^{-p}b^{-3p}}{23^{-1}a^{-2p}b^{-2p}}$ c) $\frac{16x^{-m}y^{-3m}}{18x^{-2m}y^{-5m}}$

Izvršiti naznačene operacije sa stepenima:

1.55.a) $5^{-1}5^2$ b) $a^{-3}a^{-7}a^2$ c) $a^{-5}a^8a^{-2}$ d) $x^{-1}x^{-9}x^{11}x^{-5}$

1.56.a) $a^{-1}:a^{-2}$ b) $a^{-3}:a^{-5}$ c) $x^{-5}:x^{-2}$ d) $x^{-6}:x^{-21}$

1.57.a) $(3^{-2}2^4)(3^32^{-3})$ b) $(6^{-3}49\cdot 4^{-10})(4^{10}7^26^2)$ c) $(5m^3np^{-2})(25^{-1}m^{-2}n^{-2}p^3)$

1.58.a) $(2^3a^{-3}b^4):(2^{-2}a^{-4}b^{-3})$ b) $(x-y)^{-2}:(y-x)^{-1}$ c) $(5a^3b^{-6}):(a^{-4}b^{-2}c^{-2})$

1.59.a) $(a^{-2}+b^{-1})^2$ b) $(x^{-2}+y^{-2})(x^{-2}-y^{-2})$ c) $(x^{-1}+y^{-1})(x^{-2}-x^{-1}y^{-1}+y^{-2})$

1.60.a) $(2x^{-2}-1)(4x^{-4}+2x^{-2}+1)$ b) $(8x^{-3}-27y^{-3}):(4x^{-2}+6x^{-1}y^{-1}+9y^{-2})$

Izračunati:

1.61.a) $\left[6-4\left(\frac{5}{16}\right)^0\right]^{-2}$ b) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\frac{3}{4}\right]^{-1}$ c) $\left[\left(\frac{33+4^{11}}{87-2^5}\right)^0-2\right]^{-44}$

1.62.a) $\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^0\cdot\frac{k^0}{(m+n)^{-3}}\cdot(m-n)^{-3}$ b) $\left(\frac{1}{1+a}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{1-a}\right)^{-7}\cdot\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{-6}$

1.63.a) $\left[m-(1-m)^{-1}\right]^{-1}\cdot\left[\frac{m(m-2)+m^0}{\frac{1}{m^{-2}-m+1}}\right]^{-1}$ b) $\frac{a^{-2}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}+a^3\left(a^2-2ab+b^2\right)^{-2}$

Uprostiti izraze:

1.64.* $\frac{3ab}{c^{-1}}:\left(\frac{b}{c^{-1}}+\frac{a}{c^{-1}}-\frac{a}{b^{-1}}\right)-\frac{(a-1)a^{-1}+(b-1)b^{-1}+(c+1)c^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}-c^{-1}}$

1.65.* $\frac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{a^{-1}-(b+c)^{-1}}\cdot\left[x^0+\left(\frac{2bc}{b^2+c^2-a^2}\right)^{-1}\right]$

1.66.* $\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{ab^{-1}+ba^{-1}}\right)^{-1}+\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}-\frac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}, (a\neq 0, b\neq 0, a\neq -b).$

1.67.* $2\left(\frac{a^{-x}-a^{-2x}}{a^{-x}}\right)^{-1}-\left(\frac{a^{x}-a^{-2x}}{a^{-2x}+2a^{-x}+3}\right)^{-1}+\left(a^{-x}+1\right)\left(a^{x}+a^{-x}+1\right)^{-1}, (a>0, a\neq 1, x\neq 0).$

1.68.* Izračunati vrijednost izraza $\frac{\frac{1}{2}-a^{-1}}{4-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}:\left[\frac{1}{2^{-2}(2+a)}-2a^{-1}-1\right]$,

za $a=-\frac{1}{2}$.

1.3. K O R I J E N I. A R I T M E T I Č K I K O R I J E N

Izračunati vrijednosti aritmetičkih korijena:

1.69.a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{256}$ c) $\sqrt[3]{8}$ d) $\sqrt[5]{32}$

1.70.a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt{1024}$ c) $\sqrt{576}$ d) $\sqrt[3]{27}$

1.71.a) $\sqrt{225}$ b) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt[4]{81}$ d) $\sqrt[7]{128}$

1.72.a) $\sqrt{13^2-12^2}$ b) $\sqrt{113^2-112^2}$ c) $\sqrt{65^2-63^2}$

1.73.a) $\sqrt{21^2+28^2}$ b) $\sqrt{52^2+39^2}$ c) $\sqrt{40^2+96^2}$

Za koju vrijednost varijable x je dati korijen aritmetički:

1.74.a) $\sqrt{x+2}$ b) $\sqrt{5+x}$ c) $\sqrt{x-7}$

1.75.a) $\sqrt{2x-8}$ b) $\sqrt{6-3x}$ c) $\sqrt{4x+20}$

1.76.a) $\sqrt{5-10x}$ b) $\sqrt{10+20x}$ c) $\sqrt{11x-1}$

1.77.a) $\sqrt[3]{7-2x}$ b) $\sqrt[3]{5x-1}$ c) $\sqrt[3]{2-8x}$

Izračunati vrijednosti aritmetičkih korijena:

1.78.a) $\sqrt{289}$ b) $\sqrt{3600}$ c) $\sqrt{0,81}$

1.79.a) $\sqrt{(-1)^2}$ b) $\sqrt{(-3)^2}$ c) $\sqrt{(-4)^4}$

Uprostiti date izraze:

1.80.a) $\sqrt{(a-3)^2}$, $za\ a \geq 3$. b) $\sqrt{(a-3)^2}$, $za\ a \leq 3$. c) $\sqrt{(x+1)^2}$, $za\ x < -1$..

1.81.a) $\sqrt{(5-x)^2}$, $za\ x \geq 5$. b) $\sqrt{(2x-16)^2}$, $za\ x \leq 8$. c) $\sqrt{(x+3)^2}$, $za\ x < -3$..

Napamet odrediti vrijednosti korijena:

1.82.a) $\sqrt{9 \cdot 25}$ b) $\sqrt{36 \cdot 64 \cdot 100}$ c) $\sqrt{81 \cdot 625 \cdot 0{,}0001}$

1.83.a) $\sqrt{16 \cdot 225}$ b) $\sqrt{0{,}01 \cdot 441 \cdot 256}$ c) $\sqrt{10000 \cdot 121 \cdot 9}$

Iznijeti faktor ispred korijena:

1.84.a) $\sqrt{50}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{32}$ d) $\sqrt{45}$

1.85.a) $\sqrt{72}$ b) $\sqrt{128}$ c) $\sqrt{75}$ d) $\sqrt[3]{128}$

Izvlačenjem faktora ispred korijena djelimično izračunati:

1.86.a) $\sqrt{27a^2}$ b) $\sqrt{75x^3}$ c) $\sqrt{28a^3b^5}$ d) $\sqrt{20a^5b^7}$

1.87.a) $\sqrt{72a^6b^{11}}$ b) $\sqrt[3]{16a^4b^5}$ c) $\sqrt[3]{54a^7x^{11}}$

1.88.a) $\sqrt{(a-3)^2}$ b) $\sqrt{(x-1)^3}$ c) $\sqrt[n]{a^{n+2}b^n}$

Unijeti faktor pod korijen:

1.89.a) $5\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{7}$ c) $3\sqrt{5}$ d) $4\sqrt{3}$

1.90.a) $5\sqrt[3]{2}$ b) $4\sqrt[3]{3x}$ c) $2\sqrt[4]{3}$ d) $3\sqrt[5]{2}$

1.91.a) $a\sqrt{a}$ b) $x\sqrt{5x}$ c) $b\sqrt[3]{b}$ d) $2a\sqrt{3}$

1.92.a) $a^2 \cdot \sqrt{2a}$ b) $x^3 \cdot \sqrt{2x}$ c) $5^2\sqrt[3]{2}$ d) $3b \cdot \sqrt[3]{b}$

Sabiranjem i oduzimanjem korijena izračunaj:

1.93.a) $2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}$ b) $7\sqrt{2} + 11\sqrt{2}$ c) $23\sqrt{5} - 8\sqrt{5}$

1.94.a) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 11\sqrt{3}$ b) $32\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 11\sqrt{2} - 25\sqrt{2}$

1.95.a) $5\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3} - 2\sqrt{5}$ b) $11\sqrt{7} + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 9\sqrt{7}$

1.96.a) $2\sqrt{3} + \sqrt[3]{3} - 5\sqrt{3} + 8\sqrt[3]{3}$ b) $12\sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt[3]{5} + 5\sqrt{5} - 2\sqrt[3]{5}$

1.97.a) $5\sqrt[4]{3} + 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[4]{3} - \sqrt[3]{3}$ b) $4\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[4]{5} - 5\sqrt[4]{5} - \sqrt[3]{5}$

Izvršiti djelimično korjenovanje i izračunati:

1.98.a) $\sqrt{16 \cdot 25 \cdot 64}$ b) $\sqrt{100 \cdot 81 \cdot 49}$ c) $\sqrt{256 \cdot 4 \cdot 36}$

1.99.a) $\sqrt{27} + \sqrt{75}$ b) $2\sqrt{12} - 4\sqrt{48}$ c) $3\sqrt{8} + 5\sqrt{32}$

1.100.a) $2\sqrt{27} + \sqrt{75} - \sqrt{48}$ b) $\sqrt{45} - 2\sqrt{80} + 4\sqrt{125}$

1.101.a) $\sqrt{28} - 7\sqrt{20} + 11\sqrt{44}$ b) $2\sqrt{18} + \sqrt{50} - 2\sqrt{72} - \sqrt{98}$

1.102.a) $3\sqrt{18} + \sqrt{200} - \sqrt{45} + 2\sqrt{20} - \sqrt{49}$

b) $5\sqrt[4]{0{,}01} + 2\sqrt{0{,}08} - 10\sqrt[6]{0{,}000081}$

1.103.a) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{135}$ b) $\sqrt[3]{40} - 3\sqrt{80} + 7\sqrt[3]{24}$

Pomnoži korijene koji imaju jednake izložioce:

1.104.a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}$ b) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{6}$

1.105.a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$ b) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$

1.106.a) $\sqrt[4]{20} \cdot \sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{3}$ c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}$

1.107.a) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{10}$ b) $\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{6} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{3}$ c) $\sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[7]{4} \cdot \sqrt[7]{3} \cdot \sqrt[7]{8}$

Proširi dati korijen navedenim brojem:

1.108.a) $\sqrt[4]{2}$, *sa* 3. b) $\sqrt{5}$, *sa* 2. c) $\sqrt[3]{10}$, *sa* 4.

1.109.a) $\sqrt[4]{2a^3}$, *sa* 2. b) $\sqrt[3]{3a^2}$, *sa* 4. c) $\sqrt[5]{7a^3}$, *sa* 3.

Skrati dati korijen (ako je skraćivanje moguće):

1.110.a) $\sqrt[4]{4}$ b) $\sqrt[6]{8}$ c) $\sqrt[12]{16}$ d) $\sqrt[20]{100}$

1.111.a) $\sqrt[8]{a^6}$ b) $\sqrt[15]{a^9}$ c) $\sqrt[21]{a^3}$ d) $\sqrt[18]{x^{27}}$

Dovesti korijene na zajednički eksponent i zatim ih pomnožiti:

1.112.a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{4}$ c) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[10]{2}$

1.113.a) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{2}$ c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[7]{3}$

1.114.a) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a}$ b) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[6]{2x^2}$ c) $\sqrt[5]{b} \cdot \sqrt[4]{b^3}$

1.115.a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{2a}$ b) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[12]{a} \cdot \sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[18]{a^7}$

1.116.a) $\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[15]{x^2} \cdot \sqrt[20]{x^3}$ b) $\sqrt[16]{a} \cdot \sqrt[8]{a^3} \cdot \sqrt[12]{a^5}$ c) $\sqrt[11]{x^2} \cdot \sqrt[33]{x^2} \cdot \sqrt[22]{x^2}$

1.117.a) $\sqrt{x^n} \cdot \sqrt[3]{x^{2n}} \cdot \sqrt[4]{x^n}$ b) $\sqrt[3]{ax^n} \cdot \sqrt[6]{2a^2x^{2n}} \cdot \sqrt[12]{5ax^n}$

Izvršiti naznačene operacije (množenje) sa korijenima:

1.118.a) $\sqrt[4]{1-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt[4]{\left(5-\frac{1}{2}\right)}$ b) $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{3}$

1.119.a) $\left(\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{6}$ b) $\left(\sqrt{7}-3\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{5}$ c) $\left(4\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{5}$

1.120.a) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$ b) $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$ c) $\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)^2$

1.121.a) $\left(2\sqrt{12}-\sqrt{75}\right)\cdot\sqrt{3}$ b) $\left(3\sqrt{8}+2\sqrt{50}\right)\cdot 4\sqrt{2}$

1.122.a) $\left(5\sqrt{0,02}+\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{2}$ b) $\left(10\sqrt{0,03}+\sqrt{27}\right)\cdot\sqrt{3}$

1.123.a) $\left(4+\sqrt{6}\right)\cdot\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$ b) $\left(3-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

1.124.a) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$ b) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)$

1.125.a) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$ b) $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$

1.126.a) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)$ b) $\left(\sqrt{a-2}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{a-2}+\sqrt{a}\right)$

1.127.a) $\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{16}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{16}\right)$ b) $\left(\sqrt[4]{10}-\sqrt[4]{5}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{10}+\sqrt[4]{5}\right)$

1.128.a) $\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)$ b) $\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)$

Uprostiti date izraze:

1.129.a) $\sqrt[3]{a^3+\sqrt{a^6-b^6}}\cdot\sqrt[3]{a^3-\sqrt{a^6-b^6}}$ b) $\sqrt{a+b+\sqrt{2ab}}\cdot\sqrt{a+b-\sqrt{2ab}}$

1.130.a) $\dfrac{1}{a-\sqrt{a^2-1}}-\dfrac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}$ b) $\dfrac{m\sqrt{m^2+a}+m^2+a}{m+\sqrt{m^2+a}}$

1.131.a) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(2\sqrt{3}+1\right)^2$ b) $\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)^2$

Podijeli korijene i izvrši druge operacije:

1.132.a) $\sqrt{8}:\sqrt{2}$ b) $\sqrt{50}:\sqrt{2}$ c) $\sqrt{75}:\sqrt{3}$

1.133.a) $\sqrt{40}:\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt[4]{0,01}:\sqrt[4]{100}$

1.134.a) $\sqrt{a^3}:\sqrt{a}$ b) $\sqrt[3]{x^5}:\sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[5]{a^6}:\sqrt[5]{a^3}$

d) $\sqrt{242}:\sqrt{11}$ e) $\sqrt[5]{80}:\sqrt[5]{16}$ f) $\sqrt[7]{a^{11}}:\sqrt[7]{a^8}$

1.135.a) $10\sqrt[4]{0,32}:2\sqrt[4]{200}$ b) $3\sqrt{ab^3}:\sqrt{a^3b^2}$ c) $\sqrt[3]{48a^{11}b}:\sqrt[3]{6a^3b}$

1.136.a) $\left(12\sqrt{45}-6\sqrt{20}\right):3\sqrt{5}$ b) $\left(10\cdot\sqrt[3]{0,08}-\sqrt[3]{-10}\right):\sqrt[3]{10}$

1.137.a) $(a-b):\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ b) $(a-b):\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

1.138.a) $\sqrt[3]{6}:\sqrt[6]{2}$ b) $\sqrt[15]{8}:\sqrt[5]{2}$ c) $\sqrt[4]{2}:\sqrt[12]{4}$

1.139.a) $\sqrt[3]{6}:\sqrt{2}$ b) $\sqrt[5]{8}:\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt[4]{2}:\sqrt[3]{4}$

1.140.a) $\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{2a^2}$ b) $\sqrt{3x^5}:\sqrt[4]{3x^2}$ c) $\sqrt[6]{a^5}:\sqrt[4]{a^3}$

d) $\sqrt[6]{3}:\sqrt[24]{2}$ e) $\sqrt[6]{3}:\sqrt[7]{2}$ f) $\sqrt[8]{8a^5}:\sqrt[10]{2a^3}$

1.141.a) $\sqrt[6]{a^{3n+1}}:\sqrt{a^{3n}}$ b) $\sqrt{a^{n-2}}:\sqrt[3]{a^{3-n}}$ c) $\sqrt[4]{a^5x^{3n}}:\sqrt[3]{a^2x^{3n}}$

1.142.a) $\left(4\sqrt{27}-6\sqrt[3]{3}\right):\sqrt{3}$ b) $\left(\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[3]{a^4}-a\sqrt{a^3}\right):\left(-3a\sqrt[3]{a^2}\right)$

1.143.a) $\left(a^2\cdot\sqrt[4]{b}-a\sqrt[3]{b}\right):a\sqrt{b}$ b) $\left(\sqrt[8]{8a^6b^9}+ab\sqrt[6]{8a^4b^5}-ab^2\cdot\sqrt[4]{2a^4b}\right):\sqrt[4]{2a}$

1.144.a) $\sqrt[3]{a^{n+1}}\cdot\sqrt{a^{3n}}:\sqrt[4]{a^{3n}}$ b) $\sqrt[3]{a^{n+3}}:\sqrt[4]{a^{n-1}}\cdot\sqrt{a^{5+3n}}$

Stepenuj (potenciraj) slijedeće korijene:

1.145.a) $\left(\sqrt{3}\right)^2$ b) $\left(\sqrt{5}\right)^3$ c) $\left(2\sqrt{11}\right)^2$ d) $\left(4\sqrt{3}\right)^3$

1.146.a) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^2$ b) $\left(\sqrt[3]{ax^2}\right)^2$ c) $\left(\sqrt[4]{3a^2b}\right)^3$ d) $\left(3\cdot\sqrt[7]{2a^5b^3}\right)^5$

1.147.a) $\left(\sqrt[3]{a^4}\right)^2$ b) $\left(\sqrt[3]{a^4x^3}\right)^2$ c) $\left(\sqrt{2a^3x^5}\right)^3$ d) $\left(\sqrt[5]{4a^2x^7}\right)^3$

Korjenuj date korijene, izvršavajući i druge operacije:

1.148.a) $\sqrt{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{12}}}$

1.149.a) $\sqrt[3]{\sqrt{11}}$ b) $\sqrt[6]{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt{5}}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{6}}}$

1.150.a) $\sqrt{\sqrt[5]{a}}$ b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{y}}}$ d) $\sqrt{\sqrt[6]{\sqrt{ax^2}}}$

1.151.a) $\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$ b) $\sqrt{5\sqrt[4]{3\sqrt{2}}}$ c) $\sqrt[7]{4\sqrt{3\sqrt[3]{5}}}$ d) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}$

1.152.a) $\sqrt{2\sqrt{2}}$ b) $\sqrt[3]{a^5\sqrt{a^3}}$ c) $\sqrt[3]{2a\sqrt[4]{3a}}$ d) $\sqrt[4]{5x^2\sqrt{ax^2}}$

1.153.*a) $2\sqrt{5\sqrt{48}}+3\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{15\sqrt{27}}$ b) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}:\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}}$

Racionališi nazivnik datog razlomka:

1.154.a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{7}}$ d) $\dfrac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

1.155.a) $\dfrac{11}{5\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{8\sqrt{3}}{7\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{6\sqrt{7}}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6\sqrt{5}}$

1.156.a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}-1}$ b) $\dfrac{7}{\sqrt{6}+2}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

1.157.a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}-3}{4+2\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{10+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

1.158.a) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{3\sqrt{7}+4}{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

1.159.a) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{15}{\sqrt[3]{25}}$ c) $\dfrac{6}{\sqrt[4]{2}}$ d) $\dfrac{100}{\sqrt[5]{8}}$

1.160.a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{25}}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[4]{2}}$ c) $\dfrac{11-\sqrt{2}}{\sqrt[5]{3}}$ d) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt[6]{2}}$

1.161.a) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}-1}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}+1}$ c) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{3}-1}$ d) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{4}+2}$

1.162*.a) $\dfrac{11}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{6}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Izvršavajući naznačene operacije, uprostiti date izraze:

1.163.a) $\dfrac{2}{7+4\sqrt{3}}+\dfrac{2}{7-4\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{10}+5}+\dfrac{5}{\sqrt{10}-2}-\dfrac{7}{\sqrt{10}}$

1.164.a) $\dfrac{5}{4+\sqrt{11}}-\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}+\dfrac{6}{\sqrt{7}-2}-\dfrac{\sqrt{7}-5}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$

1.165.*a) $\dfrac{a^2+1+a\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2+1}}$ b) $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1},(-1\le x\le 1)$

1.166.*a) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{a}}$ b) $\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}}-\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}\right):\dfrac{a\sqrt{a^2-4}}{4}$

1.167.* $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+1}{a-\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}}\right)$, $(a\ge 0, b\ge 0, a\ne b)$.

1.168.* $\left[\dfrac{\sqrt{a^3b^3}-\sqrt{a^{-3}b^3}}{2}:\left(1+\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)\right]\cdot\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a-b}}$, $(a>0, b>0, a\ne b)$.

1.169.*a) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ b) $\sqrt{a^2+2\sqrt{2a^2-4}}+\sqrt{a^2-2\sqrt{2a^2-4}}$

1.170. Izračunati vrijednost izraza $4x^3+2x^2-8x+7$ za $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

1.171. Izračunati vrijednost izraza $\dfrac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$, za $x=\dfrac{2am}{b(1+m^2)}$.

1.172.* Odrediti vrijednost izraza $\dfrac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}$, $za\ x=\dfrac{2mn}{n^2+1}, m>0, n>0$.

1.173.* Odrediti vrijednost izraza $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ ako je $a=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$ i $b=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$.

1.174:* Izračunati $\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, $za\ x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, $gdje\ je\ \ a>b>0$.

1.175.* Izračunati vrijednost izraza

$$\frac{xy-\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}},\ za\ x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right), y=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$$

Dokazati date jednakosti:

1.176.*a) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{11+3\sqrt{5}+2\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}{2}}=\sqrt[3]{6+2\sqrt{5}}$.

1.177.*a) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$ b) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}-\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$

1.178.*a) $\sqrt{4+\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1$

b) $\left(\dfrac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\dfrac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2=8$

1.179.*a) $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$ b) $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

1.180.* $$\left(\frac{1-\sqrt{a}}{\dfrac{1-\sqrt[4]{a^3}}{1-\sqrt[4]{a}}-\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\dfrac{\sqrt[4]{a^{-1}}+\sqrt[4]{a^2}}{1+\sqrt[4]{a^{-1}}}-\sqrt{a}}\right)^{10}=1, (a\ne 0, a\ne 1).$$

1.181.* $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1$.

Uprostiti date izraze:

1.182.* $$\frac{\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}}\cdot\frac{2}{(x+1)\sqrt{x+1}+(x-1)\sqrt{x-1}}, (x>1).$$

1.183.* $$\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right),\quad (0<a<1).$$

1.184.*a) $$\frac{2a\sqrt{1+\dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2}{4}}}{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)+\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2}}$$

b) $$\frac{x}{\sqrt[4]{\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+12}}-\frac{1}{x^2-1}.$$

1.185.* $\left[\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt[3]{(x-1)^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right]^{-2}$, $(x \neq 0)$.

1.4. STEPENI SA RACIONALNIM EKSPONENTOM (IZLOŽIOCEM)

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} \overset{def}{=} \sqrt[n]{a^m}}$$

Slijedeće stepene napisati u obliku korijena:

1.186.a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $8^{\frac{2}{3}}$ c) $64^{\frac{2}{3}}$ d) $100^{\frac{1}{2}}$

1.187.a) $125^{\frac{1}{3}}$ b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ c) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$ d) $16^{-\frac{1}{4}}$

Date korijene napisati u obliku stepena:

1.188.a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt[3]{17}$ d) $\sqrt[5]{ax^2}$

1.189.a) $\sqrt{\frac{3}{4}}$ b) $\sqrt[5]{12}$ c) $\sqrt[11]{a^8}$ d) $\sqrt[4]{3x^2}$

Izračunati vrijednosti slijedećih stepena (i izraza):

1.190.a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $8^{\frac{2}{3}}$ c) $64^{\frac{2}{3}}$ d) $100^{\frac{1}{2}}$

1.191.a) $9^{\frac{1}{2}}$ b) $16^{\frac{1}{4}}$ c) $8^{-\frac{2}{3}}$ d) $27^{-\frac{4}{3}}$

1.192.a) $25^{0.5}$ b) $81^{0.25}$ c) $16^{1.75}$ d) $0,25^{-0.5}$

1.193.a) $8^{\frac{1}{3}}:2^{-1}$ b) $3^{-2}\cdot 81^{\frac{1}{4}}$ c) $64^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ d) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{3}{8}}$

1.194.a) $16^{0.5}-\left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ b) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0.25}+(-0,027)^{\frac{2}{3}}+\left(-1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

1.195.* a) $\left\{\left[\left(3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{4}{3}}\right):2^{-\frac{5}{4}}\right]:\left[16:\left(5^2\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{5}}$

b) $\left(3^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right):\left[\left(2-15^{\frac{1}{4}}\right)\left(2+15^{\frac{1}{4}}\right)\right]$

Izvršiti naznačene operacije sa stepenima:

1.196.a) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}$ b) $a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{-1}{3}}$ c) $x^{\frac{2}{3}}:x^{\frac{-1}{3}}$ d) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}:a^{\frac{1}{3}}$

1.197.a) $a:a^{\frac{2}{3}}$ b) $\left(a^3b^2\right)^{\frac{1}{6}}$ c) $\left(\frac{8a^{-3}}{27b^9}\right)^{-\frac{1}{3}}$ d) $\left(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{6}}\right):a^{\frac{1}{4}}$

1.198.* Odrediti vrijednost izraza $\frac{1-mx}{1+mx}\cdot\sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}$, ako je $x=\frac{1}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}$.

1.199.* Izračunati vrijednost izraza $\left(\frac{m-\sqrt{x}}{m+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{m+\sqrt{x}}{m-\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{\sqrt{m^2-x}}$,
ako je $x = 4(m-1)$.

1.200.* Odrediti vrijednost izraza

$$\sqrt{\frac{2}{\left(1-z^2\right)^{-\frac{1}{2}}+1}}-\sqrt{\frac{2}{\left(1-z^2\right)^{-\frac{1}{2}}-1}}, \text{ ako je } z=2m^{\frac{1}{2}}\left(1+m^{-1}\right).$$

Izvršavajući naznačene operacije, uprostiti date izraze:

1.201.* $\left[\left(\frac{m+n}{2\sqrt{mn}}-1\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{m+n}{2\sqrt{mn}}+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right]:\left[\left(\frac{m+n}{2\sqrt{mn}}-1\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{m+n}{2\sqrt{mn}}+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$.

1.202.* $\frac{x\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}+1}{\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}:\frac{\sqrt{x+1}}{x-\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}$, $(x>1)$.

1.203.* $\left(a+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$, $(a>0, b>0, a\neq b)$.

1.204.* $\frac{\left(x^2-y^2\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$.

2. HOMOTETIJA I SLIČNOST

2.1. Kružnica (kružna linija) i krug. Centralni i periferijski ugao. Tangente kružnice. Tangentni i tetivni četverougao

2.1. Šta je kružnica? Šta je krug? Objasni pojmove radijus, tetiva, prečnik.
2.2. Čime je određena jedna kružnica?
2.3. Konstruisati kružnicu koja prolazi trima datim tačkama A, B i C.
2.4. Konstruisati kružnicu datog radijusa r koja sadrži dvije date tačke A i B.
2.5. Konstruisati kružnicu datog radijusa r koja dodiruje datu pravu a u datoj tački A.
2.6. Konstruisati kružnicu datog radijusa r koja dodiruje krake datog ugla.
2.7. Konstruisati kružnicu datog radijusa r koja dodiruje dvije date kružnice izvana.
2.8. Data je prava p i kružnica k(O, R). Konstruisati tangentu t na datu kružnicu koja je paralelna sa pravom p.
2.9. Data je prava p i kružnica k(O, R). Konstruisati tangentu t na datu kružnicu koja je normalna na pravu p.
2.10. Data je prava p i kružnica k(O, R). Konstruisati tangentu t na datu kružnicu koja sa pravom p zaklapa dati ugao α.
2.11. Data je kružnica k(O, R), tačka T na njoj i ma koja tačka A. Konstruisati kružnicu koja sadrži tačku A i dodiruje datu kružnicu u tački T.
2.12. Koji četverougao nazivamo **tetivni četverougao**?
2.13. Dokazati: Suprotni uglovi tetivnog četverougla su suplementni.
2.14. Dokazati: Ako su suprotni uglovi nekog četverougla suplementni, tada je taj
2.15. Dokazati: Jednakokraki trapez je tetivni četverougao.
2.16. Jedan ugao pravouglog trougla je 35°. Pod kojim se uglom vide katete iz centra opisane kružnice?
2.17. Dokazati: Ugao između tetive i tangente u krajnjoj tački tetive jednak je periferijskom uglu nad tom tetivom.
2.18. Dati su duž AB i ugao α. Konstruisati skup tačaka u ravni iz kojih se data duž vidi pod uglom α.
2.19. Dato je kružnica k(O, R), prava p i ugao α. Na pravoj p odrediti tačku iz koje se data kružnica vidi pod uglom α.
2.20. Konstruisati pravougli trougao ako mu je poznata hipotenuza i projekcija jedne katete na hipotenuzu.
2.21. Konstruisati pravougli trougao ako su date projekcije kateta na hipotenuzu.

2.22. Konstruiši trougao ako je poznato a, α i t_a (stranica, suprotni ugao i težišnica koja odgovara toj stranici).
2.23. Konstruiši trougao ako je poznato c, γ i t_b .
2.24. Konstruisati trougao ako je poznato h_a, t_a i R (R je radijus opisane kružnice).
2.25. Trougao ABC upisan je u kružnicu k. U tački B povučena je tangenta t. Prava p, koja je paralelna sa tangentom t, siječe stranice AB i BC, redom, u tačkama D i E. Dokazati da je četverougao ACED tetivni.
2.26. Koji četverougao nazivamo tangentni četverougao?
2.27. Koju duž nazivamo tangentna duž tačke A u odnosu na kružnicu k ?
2.28. Dokazati: Tangentne duži koje odgovaraju tački P u odnosu na datu kružnicu, jednake su.
2.29. Ako su a i b dužine kateta, c dužina hipotenuze i r radijus upisane kružnice pravouglog trougla ABC, dokazati da vrijedi: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.
2.30. Dokazati: Zbir dviju suprotnih stranica tangentnog četverougla jednak je zbiru drugih dviju stranica tog četverougla.
2.31. Dokazati: Ako je zbir dviju suprotnih stranica nekog četverougla jednak zbiru drugih dviju stranica tog četverougla, tada je taj četverougao tangentni.
2.32. Dokazati: Kvadrat je tangentni četverougao.
2.33. Dokazati: Deltoid je tangentni četverougao.
2.34. Neka je ABCD tangentni četverougao. Dokazati da se kružnice upisane u trouglove ΔABD i ΔBCD (nastale povlačenjem dijagonale BD) dodiruju.
2.35. Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu pravu i datu kružnicu i to datu kružnicu u datoj tački A.
2.36. Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu pravu p i datu kružnicu k(O, r) i to datu pravu u datoj tački A.
2.37. Konstruisati kružnicu koja dodiruje dvije date kružnice i to jednu od njih u datoj tački A.
2.38. Tačkom A van kružnice k(O, r) konstruisati tangente na kružnicu.
2.39. Koliko najviše zajedničkih tangenti mogu imati dvije kružnice? Kada dvije kružnice imaju samo jednu zajedničku tangentu ?
2.40. Konstruisati unutrašnje tangente dviju kružnica koje se dodiruju izvana.
2.41. Kada dvije kružnice nemaju zajedničkih tangenata ?
2.42. Konstruisati zajedničke vanjske tangente kružnica k(A, r) i k(B, R), ako je centralno rastojanje kružnica veće od zbira radijusa.
2.43. Konstruisati zajedničke unutrašnje tangente kružnica k(A, R) i k(B, r), ako je AB > R+r.
2.44. Dvije kružnice k(O, R) i k(O', r) sijeku se u tačkama A i B. Dokazati da su duži AB i OO' međusobno normalne.
2.45. Na dvije kružnice k(O, R) i k(O', r) dodiruju se spolja povučene su zajedničke tangente. Dokazati da je dužina odsječka između dodirnih tačaka vanjske tangente jednaka dužini odsječka unutrašnje tangente između vanjskih tangenti i svaki od njih je jednak $2\sqrt{Rr}$.

2.46. Tri kružnice radijusa a, b i c (a > b > c) dodiruju se spolja (svaka svaku) i svaka od njih dodiruje pravu p. Dokazati da vrijedi $\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{b}}$.

2.47. Dokazati: Dvije jednake tetive kružnice imaju jednaka centralna rastojanja.

2.48. Konstruisati kružnicu ako je poznata njena tetiva AB i periferijski ugao β nad tom tetivom.

2.49. Konstruisati jednakokraki trougao kome je poznata osnovica BC i ugao α nasuprot nje.

2.50. Konstruisati trougao u kome je poznata stranica AB, ugao γ i visina h_c.

2.51. Data je kružnica k(O, r) i tačka P. Konstruisati polaru kružnice u odnosu na pol P.

2.52. Data je kružnica k(O, r) i njena polara p. Konstruisati pol P.

2.2. Mjerenje duži. Mjera duži. Zajednička mjera (ZM) i najveća zajednička mjera (NZM) dvije duži. Samjerljive i nesamjerljive duži

Definicije: 1) **Kažemo da smo duž a izmjerili jediničnom duži e ako odredimo pozitivan broj k tako da vrijedi a=k·e.**

2) Ako se duž e može prirodan broj puta nanijeti na duž a bez ostatka, kažemo da je e mjera duži a.

3) Duž e koja je mjera dviju duži (a i b) naziva se zajednička mjera tih duži i označava ZM(a, b)=e.

4) Više duži mogu biti zajedniče mjere dviju duži. Najveća duž koja je mjera dviju datih duži naziva se najveća zajednička mjera (NZM) tih duži.

5) Ako dvije duži imaju najveću zajedničku mjeru, za njih kažemo da su samjerljive.

U slučaju kada duži nemaju zajedničku mjeru, kažemo da su nesamjerljive.

Odrediti računski NZM datih dviju duži:

2.53.a) a=2 cm i b=5 cm b) a=4 cm i b=6 cm c) a=10 m i b=15 m

2.54.a) a=16 m i b=24 m b) c=13 cm i d=39 cm c) m=110 m i n=60 m

2.55. Dokazati da su krak i osnovica jednakokrakog trougla sa uglom pri vrhu od 36°, nesamjerljive duži.

2.3. Proporcionalnost duži, geometrijska proporcija, geometrijska sredina dviju duži, produžena proporcija. Talesova teorema

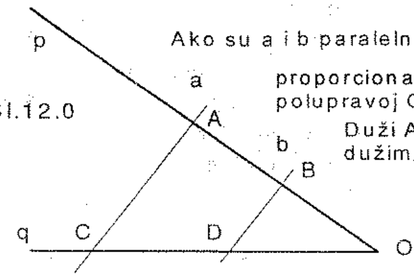
Proporcija a:b=b:c u kojoj se duž b pojavljuje dva puta kao unutrašnji (ili vanjski) član naziva se neprekidna proporcija, a duž b se zove geometrijska sredina duži a i b.

Talesova teorema: Ako su transverzale a i b dviju pravih p i q koje se sijeku paralelne, tada vrijedi:

a) Duži koje određuju transverzale na jednoj pravoj, proporcionalne su odgovarajućim dužima na drugoj.

b) Duži na transverzalama proporcionalne su odgovarajućim dužima na svakoj od datih pravih p i q.

Sl.12.0



Ako su a i b paralelne, tada vrijedi: Duži na polupravoj Op proporcionalne su odgovarajućim dužima na polupravoj Oq.

Duži AC i BD proporcionalne su odgovarajućim dužima na svakoj od polupravih Op i Oq.

2.56. Duž AB čija je dužina 30 cm podijeljena je tačkom C na dva dijela, tako da je $\overline{AC}$=6 cm. Odrediti odnose (razmjere):

a) $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ b) $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ c) $\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$ d) $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

2.57. Da li su duži AB i CD samjerljive ako je njihov odnos:

a) 3 b) 0,4 c) $\sqrt{5}$ d) $2\sqrt{3}$

2.58. Čemu je jednak odnos katete nasuprot uglu od 30° i hipotenuze?

2.59. Koliki je odnos težišnice trougla i njenog većeg dijela određenog težištem?

2.60. Koliki je odnos težišnice povučene iz vrha pravog ugla i hipotenuze tog trougla

2.61. Kada za četiri duži kažemo da su proporcionalne?

2.62. Zadanu duž AB podijeli u omjeru 3:2.

2.63. Konstrukcijom odredi duž x iz date proporcije:

a) x:2=4:1 b) 4:x=2:1 c) 5:3=x:2 d) 8:5=3:x

2.64. Konstruisati duž x ako je:

a) (5-x):x=7:5 b) (10-x):x=20:10 c) (2+x):x=8:2

2.65. Ako su a i b , (b>a) dvije date duži, konstruisati duž x ako vrijedi:

a) (a-x):x = b:a b) x: (a-x) = a:b c) (a+x):x=b:a

2.66. Date su tri duži a, b i c. Odrediti računski četvrtu proporcionalu x (x:a=b:c) ako je :

a) a=1, b=3, c=10 b) a=8, b=4, c=10 c) a=12, b=4, c=30

2.67. Ako je $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, dokazati da je $\frac{ac+c^2}{bd+d^2}=\frac{a^2}{b^2}$.

2.68. Izračunati geometrijsku sredinu G za dvije date duži a i b ako je.

a) a=9, b=1 b) a=8, b=2 c) a=12, b=3 d) a=2, b=4

2.69. Datu duž AB podijeliti na tri jednaka dijela.

2.70. Datu duž MN podijeliti na četiri jednaka dijela.

2.71. Datu duž CD podijeliti na šest jednakih dijelova.

2.72. Podijeliti datu duž AB na tri dijela koji su u datom odnosu:

a) 2:4:3 b) 1:2.3 c) 3:1:4 d) 5:2:2

2.73. Duž AB tačkom M podijeliti iznutra u omjeru (odnosu):

a) 4:3 b) 1:3 c) 3:2 d) 5:1

2.74. Datu duž AB, tačkom N podijeliti izvana u datom odnosu (omjeru):

a) 4:3 b) 1:3 c) 3:2 d) 5:1

2.75. Odrediti težište trougla ABC čiji je vrh A nepristupačan.

2.76. Odrediti središte stranice AB trougla ABC ako su tačke A i B nepristupačne.

Date su duži a, b i c. Konstruisati duž x ako je:

2.77. a) $x=\frac{2}{3}a$ b) $x=\frac{4}{7}a$ c) $x=\frac{5}{3}a$ d) $x=\frac{11}{7}a$

2.78. a) $x=\frac{a}{b}$ b) $x=a^2:b$ c) $x=ab$

2.79. a) $x=a^2$ b) $x=b^2$ c) $x=a:b$

2.80. a) $x=\frac{ac}{b}$ b) $x=\frac{ab}{c}$ c) $x=\frac{bc}{a}$

2.81. Data je duž AB. Na duži AB konstruisati tačku C tako da je $2\overline{AC}=5\overline{CB}$.

2.82. Na datoj duži AB odrediti tačke M i N, (A-M-N-B) tako da je $\overline{AM}=2\overline{MN}$ i $\overline{MN}=2\overline{NB}$.

2.83. Date su duži a, b, c i d. Konstruisati duži x i y ako vrijedi a:b:c = d:x:y.

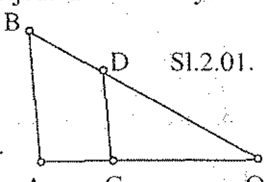
2.84. Neka su uglovi OAB i OCD jednaki (Sl.2.01.).

a) Ako je $\overline{BD}$=7, $\overline{OB}$=21, $\overline{OC}$=10, naći AC.

b) Ako je OC=CD, $\overline{AC}$=6, $\overline{AB}$=10, odrediti OC.

c) Ako je $\overline{OC}$=7, $\overline{OD}$=2 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$=14, odrediti OB.

d) Ako je $\overline{OB}$=25, OA=OD, $\overline{OC}$=4, odrediti OA.



Sl.2.01.

2.85. Date su duži m i n. Kroz datu tačku M u uglu xOy konstruisati pravu koja siječe krakove ugla u tačkama A i B, tako da je $\overline{OA}:\overline{OB}$ = m:n.

2.4. Osobine simetrala unutrašnjeg i uporednog vanjskog ugla trougla

Teoreme o simetrali ugla trougla:
Simetrala unutrašnjeg ugla trougla dijeli suprotnu stranicu na dva dijela koji su proporcionalni drugim dvjema stranicama trougla. I obrnuto, ako neka prava koja prolazi kroz vrh trougla dijeli suprotnu stranicu na dijelove koji su proporcionalni drugim dvjema stranicama trougla, tada je ta prava simetrala ugla.
Simetrala vanjskog ugla trougla dijeli suprotnu stranicu vanjskom podjelom na dijelove koji su proporcionalni drugim dvjema stranicama trougla. I obrnuto, ako prava koja sadrži vrh trougla dijeli vanjskom podjelom suprotnu stranicu trougla na dijelove koji su proporcionalni drugim dvjema stranicama trougla, tada je ta prava simetrala vanjskog ugla trougla.

2.86. Simetrala unutrašnjeg ugla trougla dijeli suprotnu stranicu (unutrašnjom podjelom) u odnosu koji je jednak odnosu ostalih dviju stranica trougla. Dokazati!

2.87. Simetrala vanjskog ugla trougla dijeli suprotnu stranicu (vanjskom podjelom) u odnosu koji je jednak odnosu ostalih dviju stranica trougla. Dokazati!

2.88. Trougao ABC ima stranice a=13 cm, b=15 cm i c=4 cm. Odrediti odsječke na stranicama trougla određene simetralama unutrašnjih uglova.

2.89. Odrediti dužine duži koje simetrale unutrašnjih uglova trougla ABC grade na njegovim stranicama ako je:

a) a=13, b=14, c=15 b) a=4, b=5, c=3 c) a=10, b=12, c=15.

2.90. Odrediti dužine duži koje simetrale vanjskih uglova ΔABC grade na njegovim stranicama ako je:

a) a=13, b=14, c=15 b) a=4, b=5, c=3 c) a=10, b=12, c=15.

2.91. Stranice trougla su 20, 21 i 28. Na koje dijelova simetrale njegovih uglova dijele njegove stranice?

2.92. Simetrala ugla na osnovici a=6 jednakokrakog trougla dijeli krak u odnosu 3:4. Odrediti dužinu kraka datog trougla.

2.93. Neka je M tačka u kojoj simetrala ugla kod vrha A, ΔABC siječe stranicu BC. Izračunati BM i MC kao funkciju od stranica $\overline{AB}$=c, $\overline{AC}$=b i $\overline{BC}$=a trougla.

2.94. Neka je N tačka u kojoj simetrala vanjskog ugla kod vrha B ΔABC siječe polupravu AC. Izračunati AN i NC kao funkciju od stranica $\overline{BC}$=a, $\overline{AC}$=b i $\overline{AB}$=c trougla.

2.95. Simetrala ugla B na osnovici jednakokrakog trougla ABC na kraku AC gradi odsječke m i n. Izraziti osnovicu a trougla kao funkciju od m i n.

2.5. Homotetija geometrijskih figura

Definicija homotetije: Preslikavanje koje svakoj tački X pridružuje tačku X' tako da vrijedi vektorska jednakost $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$, gdje je O ma koja stalna tačka ravni i k ma koji realan broj, naziva se homotetija. Tačka O se naziva centar, a broj k koeficijent homotetije.
Ako se nekom homotetijom figura F može preslikati u figuru F', kažemo da su ove figure homotetične. Ako je koeficijent homotetije dviju homotetičnih figura pozitivan broj, kaže se da su te figure direktno homotetične. U slučaju kada je koeficijent homotetije negativan, za homotetične figure se kaže da su inverzno homotetične.

2.96. Data je duž AB i proizvoljna tačka O. Odrediti homotetičnu sliku A'B' za homotetiju:
a) H(O, 3) b) H(O, -2) c) H(O, $\frac{2}{3}$) d) H(O, $-\frac{3}{4}$)

2.97. Dat je trougao ABC i tačka O van njega. Konstruisati homotetičnu sliku A'B'C' datog trougla za homotetiju:
a) H(O, 2) b) H(O, -2) c) H(O, 3)

2.98. Dat je četverougao ABCD i tačka O van njega. Konstruisati homotetičnu sliku A'B'C'D' datog četverougla za homotetiju :
a) H(O, 2) b) H(O, -1) c) H(O, 4)

2.99. Konstruisati bar jedan trougao koji je direktno homotetičan sa datim ΔABC ako je centar homotetije: a) vrh B trougla,
b) težište T trougla
c) tačka O van trougla.

2.100. Konstruisati bar jedan trougao koji je inverzno homotetičan sa datim ΔABC ako je centar homotetije: a) vrh C trougla,
b) težište T trougla
c) tačka O van trougla.

2.101. Konstruisati bar jedan trougao koji je direktno homotetičan sa datim ΔABC ako je centar homotetije: a) ortocentar H trougla,
b) centar S opisane kružnice
c) centar O upisane kružnice.

2.102. Konstruisati homotetičnu sliku date prave a ako je centar homotetije tačka O van prave i koeficijent:
a) k=2 b) k=3 c) k = -1 d) k = -2

2.103. Konstruisati homotetičnu sliku date prave a ako je centar homotetije tačka O na pravoj i koeficijent:
a) k=3 b) k=4 c) k = -2 d) k= -2

2.104. Konstruisati homotetičnu sliku datog ugla <xOy u odnosu na centar homotetije O i koeficijent:

a) k=2 b) k=4 c) k=-3 d) k=-5.

2.105. Konstruisati homotetičnu sliku datog ugla <xOy ako je centar ma koja tačka M ravni ugla i koeficijent: a) k=-1 b) k=$\frac{1}{2}$ c) k=-2

2.106. Odrediti homotetičnu sliku date kružnice k(S, r) u odnosu na centar O koji pripada kružnici i koeficijenat k=-2.

2.107. Ako su M, N i P središta stranica ΔABC, dokazati da su trouglovi ΔABC i ΔMNP homotetični. Šta je centar homotetije? Koliki je koeficijent homotetije?

2.108. Svake dvije kružnice su homotetične. Dokazati! Šta je centar homotetije?

2.109. Data su dva jednakostranična trougla paralelnih stranica. Odrediti centar homotetije ovih trouglova.

2.110. U dati polukrug upisati kvadrat čija su dva vrha na prečniku, a druga dva na kružnom luku.

2.111. Dat je ΔABC i kružnica K(O, r). U datu kružnicu upisati $\Delta A'B'C'$ tako da mu stranice budu paralelne sa stranicama datog trougla.

2.112. Dat je ΔABC i duž m. Konstruisati trougao homotetičan datom čija je stranica $\overline{A'B'} = m$.

2.113. Konstruisati trougao čiji su uglovi jednaki, a stranice tri puta veće od stranica datog ugla.

2.114. Konstruisati ΔABC ako su mu dati elementi: a, t_b i α.

2.115.* Dat je ugao <xOy i tačka A u oblasti ugla. Konstruisati kružnicu koja dodiruje krake ugla u prolazi tačkom A.

2.6. Sličnost geometrijskih figura

Definicija sličnosti: Ako za dvije figure F i F' postoji preslikavanje koje svakom paru tačaka M i N prve figure pridružuje par tačaka M' i N' druge tako da je odnos dužina duži $\overline{MN} : \overline{M'N'}$ stalan broj i obrnuto, svakom paru tačaka M' i N' druge figure pridružuje par tačaka M i N prve tako da je M'N':MN stalan broj, naziva se sličnost.
Za figure F i F' kažemo da su slične i pišemo F ~ F'.
Za figuru F kažemo da je slična figuri F', ako postoji treća figura F'' koja je sa prvom figurom homotetična, a sa drugom podudarna.

Pravila sličnosti trouglova:
1) **Dva trougla su slična ako su dva ugla jednog jednaka sa dva ugla drugog trougla.**
2) **Dva trougla su slična ako je jedan ugao u prvom trouglu jednak jednom uglu u drugom i ako su odgovarajuće stranice koje obrazuju ove uglove proporcionalne.**
3) **Ako su sve tri stranice jednog trougla proporcionalne sa odgovarajućim stranicama drugog, onda su ova dva trougla slična.**
4) **Ako su dvije stranice jednog trougla proporcionalne sa dvjema odgovarajućim stranicama drugog i ako su uglovi nasuprot većih od ovih stranica jednaki, onda su ova dva trougla slična.**

Teoreme o odnosu visina, obima i površina sličnih trouglova:
a) Obimi sličnih trouglova proporcionalni su odgovarajućim stranicama.
b) Visine sličnih trouglova proporcionalne su odgovarajućim stranicama.
c) Površine sličnih trouglova proporcionalne su kvadratima odgovarajućih stranica.

2.116. Ako su dva ugla jednog trougla $50°$ i $80°$, a jedan ugao drugog trougla $60°$, da li su ovi trouglovi slični? Zašto?

2.117. Ako su dva ugla jednog trougla $75°$ i $65°$ koliki su uglovi svakog, njemu sličnog, trougla?

2.118. Dokazati da su dva trougla slična ako su stranice jednog paralelne sa stranicama drugog.

2.119. Dva trougla su slična ako su sve stranice jednog normalne na stranice drugog. Dokazati!

2.120. Ako se iz ma koje tačke na stranici jednog trougla povuče paralela sa drugom stranicom, dobiće se trougao sličan datom. Dokazati!

2.121. Stub dalekovoda baca sjenku dužine 8 m, a štap dužine 2 m baca sjenku dugu 40 cm. Izračunati visinu dalekovodnog stuba.

2.122. Drvo baca sjenu 18,5 m. U isto vrijeme i na istom mjestu, vertikalni stub visine 3m baca sjenu dužine 4m. Kolika je visina drveta?

2.123. Na geografskoj karti ucrtana su mjesta A, B i C. Udaljenost između mjesta A i B je 10 km, udaljenost između mjesta B i C je 15 km, a udaljenost između mjesta A i C je 12 km. Razmjera karte je 1:50000. Odrediti, računski, dužine stranica trougla ABC na karti.

2.124. Na geografskoj karti razmjere 1:25000 rastojanje između tačaka A i B je 12 cm. Koliko rastojanje između mjesta A i mjesta B?

2.125. Duž DE koja odgovara stranici AB, je srednja duž ΔABC. Dokazati da je ΔABC sličan sa ΔCDE.

2.126. Ako su dva trougla slična, tada su težišne duži ovih trouglova proporcionalne odgovarajućim stranicama. Dokazati.

2.127. Rastojanje težišta trougla od stranice jednako je trećini visine na tu stranicu. Dokazati.

2.128.* Ako su dva trougla slična, tada su težišne duži jednog trougla proporcionalne odgovarajućim težišnim dužima drugog. Dokazati.

2.129. Obimi sličnih trouglova odnose se kao dvije odgovarajuće stranice tih trouglova. Dokazati!

2.130. Obimi sličnih trouglova odnose se kao dvije odgovarajuće visine tih trouglova. Dokazati!

2.131. Ako su dva trougla slična, tada su radijusi upisanih kružnica ovih trouglova proporcionalni odgovarajućim stranicama. Dokazati.

2.132. Ako su dva trougla slična, tada su radijusi opisanih kružnica ovih trouglova proporcionalni odgovarajućim stranicama. Dokazati.

2.133. Sredine stranica ΔABC su vrhovi $\Delta A'B'C'$. Dokazati da su ovi trouglovi slični i odrediti koeficijent sličnosti.

2.134. Ako dva jednakokraka trougla imaju jednake uglove pri vrhu, tada su slični. Dokazati.

2.135. Tačka M je središte stranice BC trougla ΔABC. Simetrala ugla AMB siječe stranicu AB u tački E, a simetrala ugla AMC siječe AC u tački D. Dokazati da je $\Delta ABC \sim \Delta AED$.

2.136.* Dvije visine u trouglu sijeku se tako da je proizvod odsječaka na jednoj jednak proizvodu odsječaka na drugoj. Dokazati.

2.137. Da li postoji trougao sa visinama $h_a=4$, $h_b=5$ i $h_c=8$?

2.138. Oštar ugao jednog pravouglog trougla je $35°$, a drugog $55°$. Da li su ova dva pravougla trougla slična? Zašto?

2.139. Jedan jednakokraki trougao ima pri vrhu ugao $100°$, a drugi ima ugao na osnovici $40°$. Ispitati da li su ovi trouglovi slični.

2.140. Osnovica BC jednakokrakog ΔABC jednaka je polovini kraka. Visina koja odgovara kraku ovog trougla je BN. Dokazati jednakost $\overline{AN} = 7\overline{CN}$.

2.141. Ako je H ortocentar ΔABC i AA', BB', CC' njegove visine, dokazati da vrijede jednakosti: $\overline{AH} \cdot \overline{A'H} = \overline{BH} \cdot \overline{B'H} = \overline{CH} \cdot \overline{C'H}$.

2.142. Dvije visine ΔABC su $h_a = \overline{AD}$ i $h_b = \overline{BE}$. Dokazati da je $\overline{AC} \cdot \overline{CE} = \overline{BC} \cdot \overline{CD}$

2.143. Visina trougla dužine 8 dijeli pripadnu stranicu na odsječke 4 i 6. Koliko je rastojanje ortocentra trougla od date stranice?

2.144. Ako su BD i CE visine ΔABC u kome je ugao BAC oštar, dokazati da su trouglovi ΔABC i ΔADE slični.

2.145. Dvije visine u trouglu razlikuju se za 8, a njihove pripadne stranice iznose 15 i 20 jedinica. Odrediti visine.

2.146. Trougao ΔABC ima stranice $\overline{BC} = 10$ i $\overline{AC} = 12$ koje zaklapaju ugao od $120°$. Izračunati odsječak simetrale ovog ugla.

2.147. Osnovica jednog trougla je a=5 cm, a pripadna visina $h_a=7$ cm. Kolika je visina $h_{a'}$ sličnog trougla koji ima stranicu a'=10?

2.148. Stranica trougla je 12 i visina koja odgovara ovoj stranici 16. Paralelno sa datom stranicom povučena je paralela čiji odsječak koji pripada trouglu ima dužinu 6. Koliko je vrh trougla udaljen od paralele?

2.149. Obimi dvaju sličnih trouglova su O=84 cm i O'=36 cm. Jedna stranica prvog trougla je a=24 cm. Kolika je odgovarajuća stranica drugog trougla?

2.150. Ako su a, b i c dužine stranica jednog trougla i O' obim njemu sličnog trougla, odrediti stranice drugog trougla:
a) a=20, b=30 i c=40, O'=45 b) a=12, b=15 i c=17, O'=66

2.151. Obim trougla je O=38 cm. Koliki je obim O' manjeg sličnog trougla, ako se dvije odgovarajuće stranice ovih trouglova odnose kao 2:1 ?

2.152. Stranice trougla su a=12 cm, b=15 cm i c=18 cm. Povući paralelu a' sa stranicom a tako da odsječen trougao ima obim O'=15 cm.

2.153. Dva slična jednakokraka trougla imaju zajedničku stranicu dužine 15. Osnovica manjeg trougla jednaka je 9. Odrediti obime ovih trouglova.

2.154. Površine dvaju sličnih mnogouglova su 60 cm^2 i 45 cm^2, a obim drugog iznosi 18cm. Odrediti obim prvog mnogougla.

2.155. Simetrala ugla β ΔABC siječe stranicu AC u tački D. Normala na BD kroz središte M duži BD siječe pravu AC u tački E. Dokazati da je duž DE geometrijska sredina duži AE i CE.

2.156. Simetrala pravog ugla ΔABC dijeli hipotenuzu AB u odnosu m:n. U kojem odnosu hipotenuzina visina dijeli hipotenuzu?

2.157. Osnovice trapeza su 30 i 15. Jedna dijagonala trapeza dijeli trapez na dva slična trougla. Odrediti dužinu ove dijagonale.

2.158. Srednja duž trapeza jednaka je 9. Tačka presjeka dijagonala trapeza udaljena je od njegovih osnovica 7 i 5. Kolike su osnovice?

2.159. Tačka O je presjek dijagonala trapeza ABCD. Paralelno sa osnovicama BC i AD, kroz tačku O, povučena je duž EF. Tačke E i F pripadaju kracima trapeza. Dokazati da vrijedi: $\overline{EF}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\overline{BC}}+\dfrac{1}{\overline{AD}}}$.

2.160. U jednakokraki trapez ABCD sa osnovicama AB i CD upisana je kružnica radijusa r. Dokazati da je $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=4r^2$.

2.161. Dijagonala na veći krak pravouglog trapeza normalna je na krak. Dokazati da je ova dijagonala geometrijska sredina osnovica trapeza.

2.162. Trapez ABCD je pravougli sa pravim uglovima kod vrhova B i C. Kružnica nad prečnikom AD siječe BC u tačkama M i N. Dokazati da je $\overline{BM}\cdot\overline{MC}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}$.

2.163. Kroz vrh B paralelograma ABCD povučena je prava p koja siječe AC i AD u tačkama F i E, tako da je $\overline{AE}=\frac{1}{4}\overline{AD}$.

Dokazati da je $\overline{AF}=\frac{1}{5}\overline{AC}$.

2.164. Stranice paralelograma su 25 cm i 10 cm. Manja visina paralelograma jednaka je 8 cm. Odrediti veću visinu.

2.165. Tačke A i B nalaze se na dostupnim mjestima, a njihovo međusobno rastojanje se ne može direktno izmjeriti. Pokazati kako se može izračunati rastojanje između tih tačaka.

2.166. Kako se može odrediti širina neke rijeke bez prelaska na drugu obalu?

2.167. Dat je ΔABC. Konstruisati trougao sličan datom ako mu je data stranica a.

2.168. Dat je ΔABC. Konstruisati trougao sličan datom ako mu je data visina h_a.

2.169. Dat je ΔABC. Konstruisati trougao sličan datom ako mu je data težišnica t_a.

2.170. Dat je ΔABC. Konstruisati trougao sličan datom koji ima dva puta veće stranice.

2.171. Dat je ΔABC. Konstruisati trougao sličan datom koji ima tri puta veće visine.

2.172. Dat je ΔABC. Konstruisati trougao sličan datom koji ima tri puta veće težišnice.

Konstruisati ΔABC ako je dato:

2.173. a) $a=3$, $\alpha=60°$, $b:c=5:3$ b) $b:c=3:2$, $h_a=2{,}5$ cm, $\alpha=45°$.

2.174. a) $\alpha=75°$, $b:c=2:3$, $t_a=3$ cm b) $b:c=3:4$, $s_\alpha=6$ cm, $\alpha=60°$.

2.175. a) $\alpha=75°$, $b:c=3:5$, $b+c=7$cm b) $b:c=5:7$, $c-b=1$ cm, $\alpha=60°$.

2.176. Konstruisati pravougli trougao u kome je kateta $b=12$ i odnos druge katete i hipotenuze 3:5

2.177. Konstruisati jednakokraki trougao u kome je visina $h_a=3$ i odnos osnovice i kraka $a:b=4:3$.

2.178. Konstruisati trougao ako je poznato $a:b:c=3:5:6$ i $h_a=5$ cm.

2.179. Konstruisati jednakostranični trougao u kome je poznat zbir stranice i visine.

2.180. Konstruisati jednakostranični trougao u kome je poznata visina h.

2.181. Konstruisati jednakokraki trougao u kome je poznata težišnica koja odgovara kraku i ugao pri vrhu koji obrazuju kraci.

2.182. Konstruisati pravougli trougao u kome je poznat jedan oštar ugao i zbir hipotenuze i visine koja odgovara hipotenuzi.

2.183. Konstruisati trougao u kome su poznata dva ugla i stranica na kojoj leže ovi uglovi.

2.184. Konstruisati trougao ako mu je poznata jedna stranica, jedan ugao na njoj i razmjera druge dvije stranice.

2.185. Konstruisati trougao sličan datom ako mu je poznat radijus r upisane kružnice.

2.186. Konstruisati trougao sličan datom ako mu je poznat radijus R opisane kružnice.

2.187. Konstruisati pravougaonik sličan datom ako mu je data jedna stranica.

2.188. Konstruisati paralelogram ako je zadano $a:b=5:3$, $\alpha=60°$ i dijagonala iz vrha ugla α je $d=5$.

2.7. Primjena sličnosti na pravougli trougao. Pitagorina teorema

a) Kateta pravouglog trougla je geometrijska sredina hipotenuze i svoje projekcije na hipotenuzu.
b) Visina pravouglog trougla je geometrijska sredina odsječaka koje gradi na hipotenuzi.
c) Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbiru kvadrata nad katetama. (Pitagorina teorema).

2.189. Formulisati i iskazati pravila sličnosti pravouglih trouglova.

2.190. Formulisati i iskazati pravila sličnosti jednakokrakih trouglova.

2.191. Normalne projekcije kateta na hipotenuzu odnose se kao kvadrati kateta. Dokazati!
2.192. Hipotenuzina visina je geometrijska sredina odsječaka koje gradi na hipotenuzi. Dokazati!
2.193. Primjenom sličnosti dokazati Pitagorinu teoremu.
2.194. Katete pravouglog trougla su a=6 i b=8. Izračunati hipotenuzinu visinu i odsječke koje gradi na hipotenuzi.
2.195. Hipotenuza pravouglog trougla je c=13 m, a odsječak p=6m. Odrediti katete i hipotenuzinu visinu.
2.196. Katete pravouglog trougla su 12 cm i 16 cm. Hipotenuza njemu sličnog trougla je 25 cm. Odrediti koeficijent sličnosti i katete drugog trougla.

Riješiti pravougli trougao ako je dato:

2.197.a) a=4, c=5 b) h=60, q=144 c) p=9, q=16
2.198.a) c=20, h=8 b) c=10, p:q=9:16 c) c=34, a:b=8:15
2.199. Naći odnos kateta pravouglog trougla ako su njihove projekcije na hipotenuzu 16 i 25.
2.200. Stranica kvadrata jednaka je a. Odrediti dijagonalu d kvadrata.
2.201. Dijagonala kvadrata jednaka je d. Odrediti stranicu a kvadrata.
2.202. Stranica jednakostraničnog trougla je a. Odrediti:
a) Visinu b) Radijus upisane i c) Radijus opisane kružnice.
2.203. Izračunati visinu jednakostraničnog trougla ako je data stranica a:
a) a=10 cm b) a=4 cm c) a=8 cm d) $a=2\sqrt{3}$
2.204. Izračunati stranicu jednakostraničnog trougla ako je poznata njegova visina h:
a) h=5 cm b) h=3 cm c) $h=10\sqrt{3}$ cm d) $h=12\sqrt{3}$
2.205. Hipotenuza pravouglog trougla je 10 m. Jedna kateta ovog trougla iznosi 75% od druge. Kolike su katete?
2.206. Kateta pravouglog trougla manja je za 8 cm od hipotenuze. Druga kateta jednaka je 20 cm. Koliki je obim ovog trougla ?
2.207. Jedna kateta pravouglog trougla za 10 cm je veća od druge katete i za 10 cm manja od hipotenuze. Kolike su stranice ovog trougla?
2.208. Osnovica jednakokrakog trougla je a=13, a visina na krak je h=12 Izračunati drugu visinu trougla.
2.209. Stranice trougla su 13 cm, 14 cm i 15 cm. Odrediti visinu trougla koja odgovara stranici 15 cm.
2.210. Suma kvadrata dijagonala pravougaonika jednaka je sumi kvadrata njegovih stranica. Dokazati!
2.211.* Suma kvadrata dijagonala paralelograma jednaka je sumi kvadrata njegovih stranica. Dokazati!
2.212.* Izraziti dužinu težišne linije u funkciji od dužina stranica trougla.
2.213. Težišnice pravouglog ΔABC, gdje je C vrh pravog ugla, vezane su relacijom $t_a^2+t_b^2=5t_c^2$. Dokazati!

2.214. Hipotenuza pravouglog ΔABC je c, a katete su a i b. Ako je c+a=2b. Odrediti obim trougla.
2.215. Obim romba čije se dijagonale odnose kao 3:4, je 1 cm. Izračunati dužine dijagonala.
2.216. Dijagonale romba su 4,8 m i 14 m. Odrediti obim romba.
2.217. Dijagonale romba su 12 i 16. Odrediti radijus u romb upisane kružnice.
2.218. Razmjera stranica pravougaonika je $\sqrt{2}:1$. Normale povučene kroz dva suprotna vrha na dijagonalu, dijele tu dijagonalu na tri jednaka dijela. Dokazati!
2.219. Dijagonale jednakokrakog trapeza sijeku se pod pravim uglom i dijele na dijelove od 12 cm i 9 cm. Koliki je obim trapeza?
2.220. Osnovice jednakokrakog trapeza su a=44 i c=4, a krak je b=29. Odrediti visinu trapeza.
2.221. Osnovice jednakokrakog trapeza su 10 cm i 40 cm, a krak je 25 cm. Odrediti površinu trapeza.
2.222. Osnovice trapeza su a=28 cm i c=16 cm, a kraci su b=25 cm i d=17 cm. Izračunati visinu i dijagonale trapeza.
2.223. Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata njegovih dijagonala jednak zbiru kvadrata njegovih osnovica.
2.224. Ortocentar trougla dijeli visine na odsječke, tako da je proizvod odsječaka jedne visine jednak proizvodu odsječaka bilo koje druge visine tog trougla. Dokazati!
2.225. Trougao ΔABC ima visine $h_a=\overline{AD}$ i $h_b=\overline{BE}$. Dokazati da je

$$\overline{AC}\cdot\overline{CE}=\overline{BC}\cdot\overline{CD}.$$

2.226. Ako su $h_b=\overline{BD}$ i $h_c=\overline{CE}$ visine ΔABC, dokazati da je ΔADE sličan sa ΔABC.
2.227. Dokazati: Ako u trouglu spojimo podnožja njegovih dviju visina, dobijamo trougao sličan datom.
2.228. Ako su a i b katete, a h hipotenuzina visina, dokazati jednakost

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}.$$

2.229. Ako za stranice trougla a, b i c vrijedi a=2mn, $b=m^2-n^2$, $c=m^2+n^2$, gdje su m i n ma koji realni brojevi i m>n, dokazati da je trougao pravougli.
2.230. Konstruisati duž x čija dužina u odnosu na datu jediničnu duž iznosi:
a) $x=\sqrt{30}$ b) $x=\sqrt{14}$ c) $x=\sqrt{5}$ d) $x=\sqrt{7}$

Date su duži a i b. Konstruisati duž x ako je:

2.231.a) $x=\sqrt{a^2-b^2}$ b) $x=\sqrt{ab}$ c) $x=\sqrt{ab+b^2}$
2.232.a) $x=a\sqrt{3}$ b) $x=a\sqrt{6}$ c) $x=\sqrt{\frac{ab}{2}}$

2.233. Poznate su duži a, b , c i d. Konstruisati duž x ako je:

a) $x=\sqrt{ab+c^2}$ b) $x=\sqrt{a^2-bc}$ c) $x=\sqrt{ac+bd}$

2.234. Ako su poznate duži a, b i c, konstruisati duž x, ako je $x^2=a^2+bc$.

2.235. Ako su date duži a i b i a<b, konstruisati duž $x=a^2:b$.

2.236. Konstruisati kvadrat koji je po površini jednak datom jednakostraničnom trouglu.

2.237. Konstruisati jednakostranični trougao koji je po površini jednak datom pravougaoniku.

2.238. Konstruisati jednakostranični trougao koji je po površini jednak datom rombu.

2.239. Konstruisati jednakostranični trougao koji je po površini jednak datom deltoidu.

2.240. Konstruisati jednakostranični trougao koji je po površini jednak datom kvadratu.

2.241. Konstruisati kvadrat koji je po površini jednak datom pravougaoniku.

2.242. Konstruisati geometrijsku sredinu duži a i b ako je:

a) a=2, b=5 b) a=4, b=13 c) a=3, b=11 d) a=1, b=9

2.243. Konstruisati duž x ako je $x^2=17$.

2.244. Data su dva slična trougla. Konstruisati novi trougao podudaran prvom, a sličan drugom od datih trouglova.

2.245.* Data je kružnica k(O, r) i trougao ABC. U datu kružnicu upisati trougao čije su stranice paralelne stranicama datog trougla.

2.246.* Data je kružnica k(O, r) i trougao ABC. U datu kružnicu upisati trougao čije su stranice normalne na stranice datog trougla.

2.247.* Stranice trougla su a,b i c. Dokazati da za visinu h_b trougla vrijedi formula: $h_b=\frac{2}{b}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $gdje\ je\ s=\frac{a+b+c}{2}$.

2.8. Potencija tačke u odnosu na kružnicu. Karnoovi obrasci. Zlatni presjek duži

Teoreme: Proizvod odsječaka koje kružnica odsijeca na pravoj koja prolazi tačkom P je konstantan.

Ako se prave a i b sijeku u tački P i pri tome prava a sadrži tačke A i B, a prava b sadrži tačke C i D i ako vrijedi $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$, tada su tačke A, B, C i D konciklične (pripadaju istoj kružnici).

Definicija potencije tačke u odnosu na kružnicu: Konstantu p koja je jednaka proizvodu odsječaka koje kružnica odsijeca na pravoj koja sadrži tačku P nazivamo **potencija ili moć tačke P** u odnosu na posmatranu kružnicu.

Teoreme: Ako je tačka P van kružnice tada je njena potencija u odnosu na ovu kružnicu jednaka kvadratu tangentne duži koja joj odgovara.

Ako je d centralno rastojanje tačke P u odnosu na kružnicu k(O, R), tada za potenciju tačke P u odnosu na kružnicu vrijedi: $p=d^2-R^2$.
Ako je tačka P unutar kružnice k(O, R), potencija ove tačke suprotna je kvadratu polutetive normalne na radijus kružnice koji prolazi tačkom P.

2.248. Iz tačke van kružnice povučena je najveća sječica i tangenta. Odrediti dužinu tangente (tangentne duži) ako je dužina sječice (odsječka koji kružnica određuje na sječici) 50 cm, a radijus kružnice R=21cm.

2.249. Iz tačke van kružnice povučena je najveća sječica i tangenta čija je dužina jednaka 8 cm. Vanjski dio sječice je dva puta manji od odsječka tangente. Koliki je radijus kružnice?

2.250. Tačkom P koja je od središta kružnice radijusa 5 m, udaljena 13 m, povučena je sječica koja je popolovljena kružnicom. Odrediti dužinu sječice.

2.251. Iz tačke van kružnice povučene su tangenta i sječica. Kružnica je sječicu podijelila na dva dijela: unutrašnji 60 cm i vanjski 20 cm. Odrediti dužinu tangentne duži.

2.252. Od središta kružnice radijusa R=7 cm tačka P je udaljena 9 cm. Tačkom P povučena je sječica koju kružnica polovi. Kolika je dužina sječice?

2.253. Iz tačke P van kružnice povučene su tangenta i sječica. Tangenta je za 20 cm manja od unutrašnjeg, a 8 cm veća od vanjskog dijela sječice. Odrediti dužine tangentne duži i sječice.

2.254. Tetiva kružnice ima dužinu 12 cm. Na jednom kraju tetive povučena je tangenta koja je udaljena od drugog kraja tetive 8 cm. Koliki je radijus kružnice?

2.255. Konstruisati kružnicu koja sadrži datu tačku A, a datu pravu p dodiruje u datoj tački M.

2.256. Konstruisati kružnicu koja sadrži dvije date tačke A i B i dodiruje datu kružnicu K(O, R).

2.257. Konstruisati kružnicu koja dodiruje dvije date kružnice i to jednu od njih u datoj tački A

2.258. Primjenom osobine potencije tačke u odnosu na kružnicu dokazati Pitagorinu teoremu.

2.259. Stranice trougla su c=15 cm, b=13 cm i a=4 cm. Ispitati da li je trougao pravougli, tupougli ili oštrougli.

2.260.* Stranica pravilnog desetougla jednaka je većem dijelu radijusa opisane kružnice ako se on podijeli po zlatnom presjeku. Dokazati.

2.261. Konstruisati pravilni desetougao ako je poznat radijus R opisane kružnice.

2.262.* Kvadrat stranice pravilnog petougla upisanog u kružnicu radijusa R jednak je zbiru kvadrata stranice pravilnog šestougla i stranice pravilnog desetougla koji su upisani u istu kružnicu. Dokazati.

2.263. Konstruisati pravilni petougao ako mu je poznat radijus R opisane kružnice

2.264. Presječna tačka dviju dijagonala pravilnog petougla dijeli svaku od dijagonala po zlatnom presjeku. Dokazati.

2.265. Konstruisati pravilni petougao ako mu je poznata dijagonala.

2.266. Konstruisati pravilni petougao ako su poznata središta njegovih stranica.
2.267. Konstruisati kružnicu ako je dat pol P, polara p koja odgovara polu P i jedna od tangenata kružnice koja sadrži pol P.
2.268.* U kružnici, sa raznih strana centra O, povučene su paralelne tetive dužina 6 cm i 8 cm. Ako je rastojanje između tetiva 7 cm, koliki je radijus kružnice?
2.269.* Ako su b i c stranice trougla ABC, h_a visina i R radijus opisane kružnice, dokazati da je $b \cdot c = 2Rh_a$.

3. SKUP KOMPLEKSNIH BROJEVA (C)

Ako za i, po definiciji, uzmemo broj za koji vrijedi $i^2=-1$, tada se skup svih brojeva oblika a+bi, gdje su a i b ma koji realni brojevi, naziva **skup kompleksnih brojeva**.
Ako je z=a+bi, tada se broj a=Rez naziva **realni dio** kompleksnog broja, a broj b=Imz nazivamo **imaginarni dio** kompleksnog broja z.

Sabrati (oduzmi) date imaginarne brojeve:

3.1.a) 5i+4i b) 14i+20i c) 12i-9i d) 23i-14i+22i
3.2.a) 11i+12i+i b) 17i-9i-2i c) 90i+21i-77i d) 100i-89i+6i

Izračunati vrijednost datog izraza:

3.3.a) $3i^2$ b) $-i^2$ c) $(-i)^2$ d) $(-2i)^2$
3.4.a) $4i^2+4$ b) $9-9i^2$ c) $18+8i^2$ d) $5-5i^2$
3.5.a) $4i^3$ b) i^5 c) i^{21} d) i^{30}
3.6.a) $5i^2+2i^3+7i$ b) $10i^4-45-35i^2+i^6$ c) $8i^5+2i-4i^9$ d) $-4i^3-11i^{11}$
3.7.a) $(-i)^7$ b) $(-i)^4$ c) $(-i)^5$ d) $(-i)^{11}$
3.8.a) i^{111} b) i^{233} c) i^{1992} d) i^{1999}

Napiši realni dio kompleksnog broja:

3.9.a) 15 b) -24i c) -255 d) 778i
3.10.a) 12+3i b) -33-4i c) 88+255i d) -11+90i

Odrediti imaginarni dio datog kompleksnog broja:

3.11.a) 54 b) 56i c) -i d) 57i
3.12.a) 66+2i b) 98-36i c) -1998-6i d) -1992+37i

Odrediti realni i imaginarni dio datog kompleksnog broja z:

3.13.a) z=2+5i b) z=-7+4i c) z=-1-i d) z=22-5i
3.14.a) z=0,2+3i b) z=-0,7+2,4i c) z=-0,1-2,5i d) z=-0,88i

3.15.a) $z=\frac{1}{2}+\frac{4}{5}i$ b) $z=-\frac{5}{6}+8i$ c) $z=\frac{5}{12}-\frac{15}{7}i$ d) $z=\frac{8-12i}{5}$

Izračunati vrijednost datog izraza:

3.16.a) $i^{4000}+i^{4001}+i^{4003}+i^{4004}$ b) $i^{5000}+i^{5002}+i^{5004}+i^{5006}$
3.17.a) $\sqrt{-4}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{-256}$
3.18.a) $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}-\sqrt{-16}$ b) $\sqrt{-64}-\sqrt{-81}+\sqrt{-49}$

3.19. Odredi imaginarni dio datog kompleksnog broja:
a) $\sqrt{-8}$ b) $\sqrt{-50}$ c) $2\sqrt{-12}$ d) $-3\sqrt{-32}$

3.20. Izračunaj:
a) $\sqrt{-27}+2\sqrt{-108}+\sqrt{-75}$ b) $\sqrt{-50}+\sqrt{-98}-\sqrt{-200}$

3.21. Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi:
a) $i^{4n+5}=i$ b) $i^{4n-2}=-1$ c) $i^{4n-1}=-i$ d) $i^{4n+8}=1$

3.1. Jednakost dva kompleksna broja

Za dva kompleksna broja a+bi i c+di vrijedi:
a+bi = c+di ⇔ (a=c ∧ b=d).

Odrediti vrijednost varijable x tako da vrijedi data jednakost:

3.22.a) x+11i=7+11i b) x-3+9i=-3+9i c) x+5+44i=6x+44i
3.23.a) 15+7i=15+xi b) 16-2xi=16+10i c) 1999-5i=1999-15xi

3.24. Data je jednačina x+yi=31+9i. Odrediti vrijednosti varijabli x i y.

3.25. Riješiti datu jednačinu:
a) 2+3i=x-yi b) 2x+yi=20-4i c) 7x-2yi=21+8i

3.26. Odrediti vrijednosti varijabli x i y tako da vrijedi jednakost:
a) (4-i)x+(2+5i)y=8+9i b) (3+i)x-(1-2i)y = 7.

3.27. Odrediti vrijednosti varijabli x i y rješavajući dati sistem jednačina:
a) xi-2y = -i
(1+i)x-2iy = 3+i
b) (1-i)x-(1+i)y = -1+i
(-2+2i)x-2y = -4

3.28.* Riješiti sistem jednačina: (1+i)x-(1+i)y = 1
(1-i)x+(1-i)y = i .

3.2. Operacije u skupu kompleksnih brojeva C:

1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
3) $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$

Ako su dati kompleksni brojevi z_1 i z_2 odrediti broj $z=z_1+z_2$:
3.29.a) $z_1=3-5i$, $z_2=-2+7i$ b) $z_1=10+12i$, $z_2=-1+i$ c) $z_1=1-i$, $z_2=5+3i$
3.30.a) $z_1=11-4i$, $z_2=3+i$ b) $z_1=3+2i$, $z_2=-8-4i$ c) $z_1=8+2i$, $z_2=6-5i$
3.31.a) $z_1=-1+5i$, $z_2=-4+3i$ b) $z_1=-7-2i$, $z_2=9-4i$ c) $z_1=-1+i$, $z_2=-3-i$
3.32.a) $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ b) $z_1=(a+b)+(a-b)i$, $z_2=1+i$

Ako su dati kompleksni brojevi z_1 i z_2, odrediti broj $z=z_1-z_2$:
3.33.a) $z_1=3-2i$, $z_2=3+7i$ b) $z_1=5+2i$, $z_2=5+54i$ c) $z_1=5i$, $z_2=2-i$
3.34.a) $z_1=4-5i$, $z_2=-3+2i$ b) $z_1=9-2i$, $z_2=-10-3i$ c) $z_1=8+3i$, $z_2=6i$
3.35.a) $z_1=1-2i$, $z_2=13+i$ b) $z_1=-1-2i$, $z_2=4-6i$ c) $z_1=1+8i$, $z_2=-1-9i$
3.36.a) $z_1=-5+6i$, $z_2=-1-7i$ b) $z_1=-8-9i$, $z_2=-12+115i$ c) $z_1=-2-3i$, $z_2=-8-5i$

Izračunati proizvod $z=z_1z_2$ datih kompleksnih brojeva z_1 i z_2:
3.37.a) $z_1=1+i$, $z_2=i$ b) $z_1=1-i$, $z_2=4$ c) $z_1=3i$, $z_2=5+i$
3.38.a) $z_1=3+2i$, $z_2=4i$ b) $z_1=-3-3i$, $z_2=-5i$ c) $z_1=-1-i$, $z_2=-1+i$
3.39.a) $z_1=3-2i$, $z_2=1-i$ b) $z_1=4-3i$, $z_2=2+i$ c) $z_1=2+4i$, $z_2=6-7i$
3.40.a) $z_1=9+4i$, $z_2=-3-i$ b) $z_1=10+2i$, $z_2=1+5i$ c) $z_1=8-i$, $z_2=1+9i$

Izračunati vrijednost izraza:
3.41.a) $(2-5i)(3+i)$ b) $(1+2i)(3+i)$ c) $(1-i)(1+4i)$
3.42.a) $(-2+3i)(3+2i)$ b) $(4+i)(5-7i)$ c) $(11-3i)(2-3i)$
3.43.a) $\left(-1+\frac{1}{2}i\right)(5-3i)$ b) $\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{7}i\right)\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}i\right)$ c) $\left(-\frac{1}{4}-\frac{2}{5}i\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{9}i\right)$
3.44.a) $(1+2i)(1-2i)+(4-2i)(4+2i)$ b) $(3-4i)(3+4i)-(5-2i)(5+2i)$

Odrediti kvadrat datog kompleksnog broja z ako je:
3.45.a) $z=1+i$ b) $z=1-i$ c) $z=5+2i$ d) $z=-3-4i$
3.46.a) $z=6-8i$ b) $z=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ c) $z=-\frac{2}{7}+\frac{1}{5}i$ d) $z=\frac{2}{9}-\frac{4}{5}i$
3.47. Odrediti z^3 datog kompleksnog broja z ako je:
a) $z=5i$ b) $z=-1+i$ c) $z=2-3i$ d) $z=2+5i$

3.48. Izračunati vrijednost izraza: $f(z)=2z^2-3z+11+i$, ako je $z=1-i$.
3.49. Kolika je vrijednost izraza: $f(z)=z^3-z^2+11z+8+2i$, ako je $z=3-i$.
3.50. Ako je $f(z)=-z^3+3z^2+z+2$, odrediti $f(3-2i)$.
3.51. Ako je $z=1+i$ izračunati vrijednost izraza z^2-z+1.

Odrediti realni i imaginarni dio kompleksnog broja z ako je:
3.52.a) $z=(1+3i)^2+(2-5i)^2$ b) $z=(1+i)^2+(4+4i)^2$ c) $z=(2+3i)^2+(3-4i)^2$
3.53.a) $z=(2-i)(3-\frac{1}{2}i)$ b) $z=\left(\frac{2}{3}-5i\right)\left(1+\frac{4}{5}i\right)$ c) $z=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}i\right)\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{2}i\right)$

3.3. Konjugirano-kompleksni brojevi

Ako je $z=a+bi$, za kompleksan broj $\bar{z}=a-bi$ kažemo da je **konjugirano-kompleksan** kompleksnom broju $z=a+bi$.

Odrediti konjugirano-kompleksan broj datog broja z ako je:
3.54.a) $z=23$ b) $z=-62i$ c) $z=-3+8i$ d) $z=-15-9i$
3.55.a) $z=2+3i$ b) $z=-6+2i$ c) $z=3-99i$ d) $z=24-55i$
3.56. Ako je $z=5+3i$ izračunati:
a) $z+\bar{z}$ b) $z-\bar{z}$ c) $\bar{z}+2z$ d) $2\bar{z}+z$
3.57. Ako je $z=-1-i$, izvršavajući operacije sa kompleksnim brojevima odrediti vrijednost izraza:
a) $z\cdot\bar{z}$ b) $z-\bar{z}$ c) $(\bar{z}-z)\cdot z$ d) $(\bar{z}+z)(z-\bar{z})$
3.58. Za koje vrijednosti varijable m su dati kompleksni brojevi konjugirano-kompleksni:
a) $1+mi$, $1-9i$ b) $84x-2mi$, $84x+2i$ c) $-999-4i$, $-999+8mi$?
3.59. Odrediti vrijednosti parametara m i n tako da kompleksni brojevi $z_1=2m-2n-(n-4)i$ i $z_2=m-1+(m-2n)i$ budu konjugirano-kompleksni.
3.60. Za svaki kompleksan broj $z=x+yi$ vrijedi: Brojevi $z+\bar{z}$ i $z\cdot\bar{z}$ su realni. Dokazati.
3.61. Dokazati da za svaka dva kompleksna broja vrijede sljedeće jednakosti.:
a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ b) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$ c) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

3.4. Dijeljenje kompleksnih brojeva

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Odrediti količnik $z_1 : z_2$ datih kompleksnih brojeva z_1 i z_2:

3.62.a) $z_1=8,\ z_2=1+i$ b) $z_1=1-i,\ z_2=1+i$ c) $z_1=3-i,\ z_2=3+i$
3.63.a) $z_1=2-i,\ z_2=-3+i$ b) $z_1=4+3i,\ z_2=5+2i$ c) $z_1=7-2i,\ z_2=-2+3i$

3.64. Izračunati recipročan broj datog broja z:
a) $z=-i$ b) $z=2-i$ c) $z=-2+3i$ d) $z=1+i$

Odrediti kompleksan broj određen datim izrazom:

3.65.a) $\dfrac{1}{1-i}$ b) $\dfrac{5+2i}{3i}$ c) $\dfrac{2-3i}{4+5i}$ d) $\dfrac{8-i}{7+i}$

3.66.a) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$ b) $\dfrac{(1+i)^2}{1-i}+\dfrac{1+i}{(1-i)^2}$ c) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{1+i}-\dfrac{1}{(1-i)^2}$

3.67. Odrediti realni i imaginarni dio kompleksnog broja z ako je:
a) $z=\left(\sqrt{3+4i}-\sqrt{3-4i}\right)^2$ b) $z=\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(2i+1)^2}{i+2}$ c) $z=(1+i)^{-1}$

3.68. Kojim brojem treba pomnožiti broj $z_1=3+i$ da bi se dobio broj $z_2=5+6i$?

Riješiti datu jednačinu:

3.69.a) $(6-i)z=-i$ b) $(2+i)z=4i$ c) $(5+i)z=11i$
3.70.a) $(1+i)z=2-i$ b) $(1-i)z=1+i$ c) $13iz=(1+i)^2$
3.71. Odrediti rješenje jednačine $(2i-z)(1+i)+(1+iz)(3-i)=2-i$.

Izračunati vrijednost izraza:

3.72.a) $\dfrac{(1+i)^2+(1-i)^3}{(1+i)^4}$ b) $\dfrac{(2-i)^3-(2+i)^2}{2-i}$ c) $\dfrac{(1+i)^2-(2+i)^3+i^{15}}{(1+i)^2}$

3.73.a) $\dfrac{(1+i)^{30}+(1+i)^{32}}{(1-i)^{50}-(1-i)^{51}}$ b) $\dfrac{(1+i)^{1000}}{(1-i)^{500}}$ c) $\dfrac{(1-i)^{1000}}{(1+i)^{100}}$

3.74. Ako je $f(z)=2z-3z^2+10i$, odrediti $f(1-i)$ i $f(2+3i)$.

3.75.* Ako je $(x+yi)^2=a+bi$, dokazati da je $(x-yi)^2=a-bi$.

3.76.* Dokazati: a) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2\neq 0$ b) $\overline{z^{-1}}=\left(\overline{z}\right)^{-1},\ z\neq 0$

Rastaviti na faktore (činioce, čimbenike):

3.77.a) x^2+1 b) x^2+25 c) x^2+121 d) x^2+256
3.78.a) x^2+4 b) x^2+9 c) $9x^2+144$ d) $4x^2+9$
3.79.a) a^2+b^2 b) a^2+4b^2 c) $9a^2+16b^2$ d) $a+b$

3.5. Modul (apsolutna vrijednost) kompleksnog broja

Ako je $z=a+bi$, realan broj $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ nazivamo modul (ili apsolutna vrijednost) broja z.

Odrediti apsolutnu vrijednost (modul) datog kompleksnog broja z

3.80.a) $z=12$ b) $z=8i$ c) $z=-i$ d) $z=10i$
3.81.a) $z=3-4i$ b) $z=6+8i$ c) $z=5-12i$ d) $z=-20-21i$?
3.82.a) $z=8+6i$ b) $z=12+5i$ c) $z=10+10i$ d) $z=-2-3i$?
3.83.a) $z=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$ b) $z=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$ c) $z=\dfrac{20}{29}-\dfrac{21}{29}i$ d) $z=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$

3.84. Ako je $z=-21+20i$, odrediti:
a) $|z|$ b) $|\overline{z}|$ c) $|z+\overline{z}|$ d) $|z-\overline{z}|$

3.85. Dokazati da za svaki kompleksan broj z vrijedi:
a) $|z|=|-z|$ b) $|z|=|\overline{z}|$ c) $|z|=|-\overline{z}|$ d) $|\overline{z}|=|\overline{\overline{z}}|$

3.86. Ako je $z_1=4-3i$, $z_2=12-5i$, odrediti:
a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $|z_1+z_2|$ d) $|z_1z_2|$

3.87. Ako je $z_1=6+8i$, $z_2=9-12i$, odrediti:
a) $|z_2+z_1|$ b) $|z_1-z_2|$ c) $|z_2-z_1|$ d) $|z_1z_2|$

3.88. Ako su dati kompleksni brojevi $z_1=2-3i$, $z_2=-5+i$, izračunati $|z_1+z_2-z_1z_2|$.

3.89. Izračunaj $|z_1+z_2+2z_1z_2|$ ako je $z_1=1-4i$, $z_2=2+3i$.

3.90. Odrediti modul kompleksnog broja z ako je:
a) $z=\dfrac{2+5i}{2-5i}$ b) $z=\dfrac{1+i}{(1-i)^2}$ c) $z=\dfrac{7-5i}{(2i)^5}$ d) $z=\dfrac{i^{13}}{1+2i^{17}}$

Dokazati da vrijedi:

3.91.a) $|z|^2=z\cdot\overline{z}$ b) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ c) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2\neq 0.$

3.92.*a) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ b) $|z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|$

3.93.* Ako je $z=1+2i$ i $f(z)=\dfrac{7-z}{1-z^2}$, dokazati da vrijedi $|z|=2|f(z)|$.

3.94. Nakon računanja, odredi realni i imaginarni dio i modul datog broja z ako je:
a) $z=\dfrac{i}{2}+\dfrac{1+i}{4}$ b) $z=\dfrac{i-3}{i}+\dfrac{2-i}{2}$ c) $z=\dfrac{2i-1}{3}+\dfrac{3+5i}{2}+1$

3.95. Poznat je kompleksan broj $z_1=2-3i$. Odrediti kompleksan broj $z=x+yi$ tako da slijedeća konjunkcija bude istinita:
a) $\mathrm{Re}(z\cdot z_1)=18\ \wedge\ \mathrm{Im}\left(\dfrac{\overline{z}}{z_1}\right)=\dfrac{1}{13}$ b) $\mathrm{Im}(z\cdot z_1)=2\ \wedge\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{z_1}\right)=-\dfrac{3}{13}$

3.96. Dati su kompleksni brojevi $z_1=3+2i$ i $z_2=2+i$. Odrediti kompleksan broj $z=x+yi$, ako je: a) $\operatorname{Re}(z\cdot\overline{z_1})=-1 \wedge \operatorname{Im}\left(\frac{z}{z_2}\right)=\frac{3}{5}$

b) $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z_2}\right)=\frac{3}{5} \wedge \operatorname{Im}(z\cdot\overline{z_1})=-1$

3.97. Dokazati da je $(1+i)^4-(1-i)^4$ realan broj.

3.98. Dokazati da je $\frac{(2+i)^3+(1-i)^6}{-18+2i}$ imaginaran broj.

3.99. Riješiti jednačinu (po nepoznatoj z):

a) $z-3\overline{z}=8-2i$ b) $\overline{z}+4z=15-6i$ c) $2z+3\overline{z}=11+i$

3.100. Dokazati da je za svaki prirodan broj n izraz $(1+i)^{4n}$ realan broj.

3.101. Dokazati da je za svaki prirodan broj n izraz $(1-i)^{4n+2}$ čisto imaginaran broj

Odrediti realni i imaginarni dio kompleksnog broja z ako je:

3.102.*a) $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n, n\in N$. b) $z=\left(\frac{10}{i}\right)^n, n\in N$. c) $z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n, n\in N$.

3.103.*a) $z=\frac{(1-2i)^3}{(1+i)^4+3}$ b) $z=\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}, n\in N$. c) $z=\left(\frac{i+i^{2000}}{i-i^{2000}}\right)^2$

3.6. Predstavljanje kompleksnih brojeva u ravni. Kompleksna ravan

U pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu odredi tačku koja odgovara datom kompleksnom broju z, ako je:

3.104.a) $z=7$ b) $z=-3i$ c) $z=-5$ d) $z=8i$

3.105.a) $z=3+2i$ b) $z=-3+i$ c) $z=4-3i$ d) $z=-4-2i$

Odrediti kompleksan broj kojem odgovara data tačka:

3.106.a) A(3, 0) b) B(0, 3) c) C(-2, 0) d) D(0, -1)

3.107.a) A(1, 6) b) B(-2, 4) c) C(-3, -5) d) D(5, -2)

3.108. Za svaki dati broj z u koordinatnom sistemu odredi tačku koja mu odgovara:

a) $z=2i$ b) $z=-4i$ c) $z=5+3i$ d) $z=-4-3i$

3.109. Odrediti zbir, razliku, proizvod i količnik kompleksnih brojeva određenih tačkama A(3, 5) i B(2, -3).

3.110. Odrediti modul zbira vektora određenih tačkama M(2, 5) i N(7, 1).

3.111. Odrediti modul razlike vektora određenih tačkama A(-2, -2) i B(1, 2).

3.112. Koliki je modul količnika kompleksnih brojeva kojima odgovaraju tačke A(3, 1) i B(-2, -5)?

3.113. Koji dio ravni predstavljaju tačke koje odgovaraju kompleksnom broju z u kompleksnoj ravni, ako vrijedi:

a) $|z|=1$ b) $|z|=4$ c) $|z-1|=2$ d) $|z+3|=5$?

3.114. Nacrtaj figuru koju formiraju tačke kompleksne ravni koje odgovaraju broju z ako je:

a) $|z|<3$ b) $|z|\leq 5$ c) $1\leq|z|\leq 3$ d) $2\leq|z|\leq 7$?

3.115. Predstavi radijus vektore datih kompleksnih brojeva:

a) $z=-2+3i$ b) $z=2+i$ c) $z=5-2i$ d) $z=-2+4i$

3.116. Grafički odrediti zbir vektora koji odgovaraju kompleksnim brojevima:

a) $z_1=4+2i$ i $z_2=-4+i$. b) $z_1=-5$, $z_2=5i$. c) $z_1=-4-2i$ i $z_2=-3-5i$

3.117. Koji vektor odgovara razlici vektora $z_1=7+2i$, $z_2=2-5i$?

3.118. Odrediti grafički zbir tri vektora $z_1=3-5i$, $z_2=2-i$, $z_3=4+3i$.

3.119. Provjeri grafički zakon komutacije za sabiranje kompleksnih brojeva.

3.120. Provjeri grafički asocijativnost sabiranja kompleksnih brojeva

3.7. Kompleksni brojevi - razni zadaci

3.121.* Podijeliti kompleksne brojeve:

a) $\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{-1+i\sqrt{3}}$ b) $\frac{-a}{i\sqrt{a}}, a\neq 0$ c) $\frac{a+i\sqrt{b}}{a-i\sqrt{b}}$

3.122.* Izračunati:

a) $z=\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$ b) $z=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6+\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^6$ c) $z=\sqrt{5+12i}$

3.123. Za koje vrijednosti varijabli x i y vrijedi jednakost:

$$\frac{2x+(1-y)i}{i}=3+4i\ .$$

3.124.* Izračunati vrijednost izraza:

a) $\left(\frac{1+i}{2}\right)^4$ b) $\left(\frac{1}{1+i\sqrt{7}}\right)^{-4}$ c) $\frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}$

3.125.* Izračunati:

a) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$ b) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60}$ c) $\sqrt{i}$ d) $\sqrt{-i}$

3.126.* Dokazati jednakost: $\left(\frac{i+\sqrt{3}}{2}\right)^6+\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^6=-2$.

Izračunati vrijednost izraza:

3.127.* $\dfrac{-[(-3i)(2-4i)-(2+4i)3i]^2}{(1-i)(1+i)^2-\left[\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)-\frac{1+2i}{1-2i}\right]-4i}$

3.128.* $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{12}-\left(1+i\sqrt{3}\right)^{6}}{(-1+i)^{12}}$.

3.129.* Ako je $x=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, dokazati da vrijedi:

a) $x^3=1$ b) $y^3=1$ c) $x^2=y$.

3.130.* Naći sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $\bar{z}=z^2$.

3.131.* Ako je $1+z+z^2=0$, dokazati da je $z^3=1$.

3.132.* Dokazati tačnost slijedećih formula:

a) $\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}=\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}$ b) $\sqrt{a+bi}-\sqrt{a-bi}=i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$

3.133.* Odrediti realne brojeve x i y ako je $\frac{x-1}{3+i}+\frac{y-1}{3-i}=i$.

3.134.* Pronaći kompleksan broj z=x+yi koji zadovoljava slijedeće uvjete:

$$\left|\frac{16z+1}{4\bar{z}}\right|=4 \quad\wedge\quad \operatorname{Re}\left(\frac{2z}{\bar{z}}\right)=1.$$

3.135.* Ako za kompleksne brojeve a, b i c vrijedi $|a|=|b|=|c|=1$, dokazati :

a) $\bar{a}=\frac{1}{a}$, $\bar{b}=\frac{1}{b}$, $\bar{c}=\frac{1}{c}$ b) $|ab+bc+ca|=|a+b+c|$.

3.136.* Dokazati da vrijedi $f(n+4)+f(n)=0$, ako je funkcija f definirana formulom: $f(n)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n, n\in N$.

3.137.* Dat je polinom $f(z)=z^2-(3+4i)z-1+5i$.

a) Odrediti vrijednost polinoma za $z=z_1=2+3i$.

b) Dokazati da vrijedi $\overline{f(z)}\neq f(\bar{z})$.

c) Izračunati $\overline{f(z_1)}$ i $f(\overline{z_1})$.

3.138.* Ako za module dva kompleksna broja vrijedi $|z_1|=1$, $|z_2|=1$, dokazati da je broj $z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$, realan broj.

3.139.* Neka su x, y i z tri kompleksna broja koji imaju module jednake 1. Odrediti module brojeva $x+y+z$ i $xy+yz+xz$.

3.140.* Neka je K skup kompleksnih brojeva modula 1. Dokazati da za svaka dva kompleksna broja a i b (a, b ∈ K) vrijedi ekvivalencija:

$$a+b-ab+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad a+b+ab-1=0.$$

4. KVADRATNE JEDNAČINE (JEDNADŽBE)

Jednačina koja se može dovesti na oblik $ax^2+bx+c=0$, gdje su a, b i c realni brojevi i $a\neq0$, naziva se kvadratna jednačina. Ovo je **standardni oblik kvadratne jednačine**. Izraz ax^2 naziva se **kvadratni član** jednačine, a izraz bx nazivamo **linearni član** kvadratne jednačine. Broj c nazivamo **slobodni član** kvadratne jednačine.
Realan broj a nazivamo **koeficijent kvadratnog člana**, broj b se naziva **koeficijent linearnog člana** kvadratne jednačine.
Ako je neki (ili oba) od brojeva b ili c jednak nuli, tada kvadratnu jednačinu nazivamo **nepotpuna**.
Kvadratnu jednačinu $ax^2+bx+c=0$ rješavamo primjenom formule:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

4.1. Odredi rješenje date jednačine:
a) $x+3=0$ b) $7x-21=0$ c) $x-11=0$ d) $6x-17=0$

Transformiši datu kvadratnu jednačinu na oblik $ax^2+bx+c=0$:

4.2.a) $2x^2-4x=5x^2-3x+1$ b) $31-4x+2x^2=7x^2-2x$ c) $7x-1=x^2-6x-8$

4.3.a) $(x+3)^2-3x=2x^2-3x$ b) $(x-1)(4x+1)=x^2+3x$ c) $5(x+4)-(x-1)^2=2x+3$

Odrediti kvadratni član date jednačine:

4.4.a) $5x^2+4x-11=0$ b) $-82x^2-144x+99=0$ c) $2020x^2-77x+30=0$

4.5.a) $6x^2-65x=x^2+11$ b) $77x-5x^2=22$ c) $88x^2-8x-1=277x^2+55$

Odrediti linearni član date kvadratne jednačine:

4.6.a) $-5x^2+44x-17=0$ b) $802x^2+34x+19=0$ c) $-20x^2-177x+50=0$

4.7.a) $5x^2-35x-2=12x$ b) $-x^2-2x+5x^2=77$ c) $123x-4x^2+12=71x$

Napiši slobodni član date kvadratne jednačine:

4.8.a) $-11x^2+14x+55=0$ b) $2x^2-4x-119=0$ c) $-33x^2-87x+2000=0$

4.9.a) $3x^2-6x+10=2x$ b) $x^2+11+5x=33$ c) $59x-7x^2+8=x-2$

Odrediti koeficijent kvadratnog člana kvadratne jednačine:

4.10.a) $-3x^2+14x-7=0$ b) $2x^2+4x+119=0$ c) $-7x^2-27x+52=0$

4.11.a) $x^2-4x-4=55$ b) $3x^2+8x=5-5x^2$ c) $-x^2-2x+4=3x^2+35$

Napisati koeficijent linearnog člana date kvadratne jednačine:

4.12.a) $7x^2-11x-12=0$ b) $-x^2+113x+12=0$ c) $43x+6x^2=34-27x-x^2$

4.13. Napiši slobodni član kvadratne jednačine:
a) $-3x^2-33x+333=0$ b) $-76x^2-145x+13=7$ c) $5-45x^2+45x=1245$

Odredi koeficijent kvadratnog, koeficijent linearnog člana i slobodni član jednačine:

4.14.a) $2x^2-9x-45=0$ b) $9x^2+8x=-11+2x$ c) $-4x^2-5x+1=x^2+8x-5$
4.15.a) $-x^2+x-5=0$ b) $x^2-x=-1$ c) $x^2-2x+5=2x^2-x+7$

4.1. Rješavanje nepotpune kvadratne jednačine (jednadžbe)

Riješiti date nepotpune kvadratne jednačine:
4.16.a) $45x^2=0$ b) $x^2-64=0$ c) $4x^2-25=0$ d) $25x^2-16=0$
4.17.a) $x^2+9=0$ b) $x^2+64=0$ c) $4x^2+25=0$ d) $9x^2+16=0$

Koristeći osobinu proizvoda $ab=0 \Leftrightarrow (a=0 \vee b=0)$, riješi date jednačine:
4.18.a) $x(x+1)=0$ b) $(x-3)x=0$ c) $5x(2x-1)=0$ d) $-2x(3x+1)=0$
4.19.a) $(x-3)(x+2)=0$ b) $(x+3)(x-5)=0$ c) $(x+11)(2x-6)=0$
4.20.a) $(2x-3)(4x-1)=0$ b) $(-4x+3)(2x-5)=0$ c) $(x-1)(-2x-8)=0$

Odrediti rješenja nepotpunih kvadratnih jednačina:
4.21.a) $x^2+x=0$ b) $x^2-x=0$ c) $x^2-5x=0$ d) $x^2+15x=0$
4.22.a) $x^2+3x=0$ b) $7x^2+3x=0$ c) $6x^2-x=0$ d) $4x^2-5x=0$
4.23.a) $-x^2-3x$ b) $-2x^2+8x=0$ c) $-84x^2+11x=0$ d) $-5x^2-2x=0$
4.24.a) $2ax^2-bx=0$ b) $mx^2-3nx=0$ c) $3abx^2+6bx=0$ d) $(a+b)x^2-44x=0$

4.25. Provjeriti da li je $x=2$ rješenje date kvadratne jednačine:
a) $x^2+x-6=0$ b) $5x^2-2x-18=0$ c) $-3x^2+4x+4=0$ d) $5x^2+11x-7=0$
4.26. Provjeriti da li je $x=-3$ rješenje kvadratne jednačine:
a) $x^2+2x-3=0$ b) $-x^2+5x+24=0$ c) $3x^2+5x-12=0$ d) $-4x^2-11x+3=0$
4.27. Provjeriti da li je $x=2+i$ rješenje kvadratne jednačine:
a) $x^2-4x+5=0$ b) $-2x^2+8x-10=0$ c) $x^2+4x+5=0$ d) $-x^2-4x+3=0$
4.28. Provjeriti da li su $x=3-2i$, $x=3+2i$ dva rješenja kvadratne jednačine:
a) $x^2-6x+13=0$ b) $2x^2+12x+26=0$ c) $2x^2-12x+26=0$

Riješiti date (nepotpune) kvadratne jednačine:
4.29.a) $(x-2)(x+2)+7=10$ b) $11(x-1)(x+1)=33$ c) $-4(2x-1)(2x+1)-3=0$
4.30.a) $(x-3)(x+3)+1=2x^2-2$ b) $x^2-10=(2-3x)(2+3x)$
c) $(x-1)(x+1)=5(1-3x)(1+3x)+1$ d) $(2x-1)(2x+1)=4(2+x)(2-x)+15$
4.31.a) $(2x+1)^2+(5x-1)(x-3)=40-12x$ b) $(3-2x)^2+(x+5)(x-2)=2x^2+x-1$
4.32.a) $\frac{5x^2-4x}{3}-\frac{33-2x^2}{6}=-\frac{11}{2}$ b) $\frac{2x}{x+1}+\frac{2x}{x-1}=\frac{16}{3}$ c) $\frac{3x+5}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=-\frac{3}{2}$
4.33.a) $10(x+2)-19=(1+5x)(1-5x)$ b) $(x+1)(x+2)+(x-2)(x+5)=-8$
4.34.a) $2ax^2-bx=0$ b) $a^2x^2+b^2x=0$ c) $x^2-24ax=0$ d) $(m+1)x^2-3mx=0$
4.35.a) $x^2+4x+4=0$ b) $x^2-6x+9=0$ c) $x^2+14x+49=0$ d) $x^2-16x+64=0$

4.2. Rješavanje potpune kvadratne jednačine (jednadžbe)

Riješiti slijedeće (potpune) kvadratne jednačine (jednadžbe):
4.36.a) $x^2-7x+12=0$ b) $x^2-7x+10=0$ c) $x^2+2x-3=0$ d) $x^2+3x-10=0$
4.37.a) $x^2-9x+14=0$ b) $x^2-11x+10=0$ c) $x^2-11x+24=0$ d) $x^2-13x+42=0$
4.38.a) $x^2-x-30=0$ b) $x^2+x-30=0$ c) $x^2-4x-21=0$ d) $x^2-8x-20=0$
4.39.a) $x^2+4x+3=0$ b) $x^2+7x+10=0$ c) $x^2+10x+9=0$ d) $x^2+11x+24=0$
4.40.a) $x^2-6x+34=0$ b) $x^2-2x+5=0$ c) $x^2+2x+2=0$ d) $x^2+6x-78=0$
4.41.a) $x^2-2x-35=0$ b) $x^2+8x+15=0$ c) $x^2-x-12=0$ d) $x^2+11x+30=0$
4.42.a) $4x^2-8x+3=0$ b) $9x^2+18x+5=0$ c) $3x^2-5x-78=0$ d) $2x^2+x-3=0$
4.43.a) $x^2-4x+4=0$ b) $4x^2+20x+25=0$ c) $9x^2-12x+4=0$ d) $9-30x+25x^2=0$
4.44.a) $x^2=-40+13x$ b) $x^2-4x=-53$ c) $4x^2=3-4x$ d) $49x^2=3-14x$
4.45.a) $5x^2+x+3=4x^2+5x$ b) $5x^2-2x+3=4x^2+x+21$ c) $5x+20=3-x^2+13x$
4.46.a) $(x+3)(x-2)+(x+2)^2-3x-10=0$ b) $(x-5)^2+(3-x)^2-4(x+5)(3-x)-48=(x+1)^2$
4.47.a) $(x-1)(x-2)(x-3)-(x^2+3)(x-5)+2x-33=0$ b) $(x-m)^2-2x(x-m)+m^2=0$
4.48.a) $\frac{x^2}{6}-\frac{2x}{3}=\frac{3x-10}{4}$ b) $\frac{(x-11)^2}{10}-\frac{(6x-1)^2}{5}=7-\frac{7x-3}{2}$
4.49.a) $8x+11+\frac{7}{x}=\frac{21+65x}{7}$ b) $\frac{5(x-1)}{8}=\frac{x}{10}+\frac{10}{x}$
4.50.a) $\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}=4\left(\frac{1+t^2}{t^2}-\frac{3}{2t}\right)$ b) $\frac{6}{y^2-1}-\frac{2}{y-1}=2-\frac{y+4}{y+1}$
4.51.a) $\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-2}{1-x}-\frac{4}{x-1}$ b) $\frac{3x-1}{x+2}-\frac{18}{2-x}=\frac{7x^2+28}{x^2-4}+\frac{7}{2+x}$
4.52.a) $\frac{8}{6-z}=\frac{z}{10-z}+\frac{32}{z^2-16z+60}$ b) $\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=0$
4.53.* $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}-\frac{x^2+4x+6}{x+2}-\frac{x^2+6x+12}{x+3}=0.$
4.54.a) $\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-1}{x^3+1}$ b) $\frac{8x}{x+1}-\frac{6}{x^2+3x+2}-\frac{9}{x+2}=0$
4.55.a) $(x^2-16x)^2-2(x^2-16x)-63=0$ b) $(x^2+3x-4)^2+(x^2+3x+2)^2-36=0$
4.56.a) $\left(\frac{1}{x+1}\right)^2-\frac{8}{x+1}+15=0$ b) $\left(\frac{x+3}{7}\right)^2-\frac{8(x+3)}{7}-20=0$
4.57.a) $(x^2-4x+5)^2-(x-1)(x-3)=4$ b) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$
4.58.a) $x^2-4x+\frac{10}{x^2-4x+5}=2$ b) $\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{x^2-2x+3}=\frac{6}{x^2-2x+4}$

Riješiti slijedeće jednačine uzimajući da su parametri koji se u njima javljaju realni brojevi za koje je jednačina definirana:
4.59.a) $x^2-5ax+6a^2=0$ b) $x^2-2mx+m^2-n^2=0$
4.60.a) $ay^2-(a+1)y+1=0$ b) $y^2-2(m+n)y+4mn=0$

4.61.a) $\frac{a}{x-b}-2=\frac{b}{a-x}$ b) $\frac{a}{x-a}-\frac{x}{x+a}=\frac{1}{3}$

4.62.a) $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$ b) $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}+\frac{c}{x+c}=3$

4.63.a) $\left(\frac{x+m}{x-m}\right)^2+\frac{7}{2}\left(\frac{x+m}{x-m}\right)+3=0$ b) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2-8\cdot\left(\frac{a-x}{x-b}\right)+15=0$

4.64.* $\frac{m^2+2n}{nx+2n+mx+2m}-\frac{m}{x+2}-\frac{x}{m+n}+\frac{x}{x+2}=0.$

4.65.* $\frac{x}{ax-3a}-\frac{a+3}{ax-3a-bx+3b}=\frac{1}{3-x}-\frac{x}{a^2-ab}.$

4.66.* $\frac{x}{a^2+ab}-\frac{x}{ax+3a}+\frac{1}{x+3}=\frac{a+3}{ax+3a+bx+3b}.$

4.67.*a) $\frac{a}{(b-1)x}-\frac{a-1}{(b-1)^2x^2}=1.$ b) $ax(bx-a)-c(a-bx)=0$

4.68.* $\frac{1}{x+a+b}+\frac{1}{x-a+b}+\frac{1}{x+a-b}+\frac{1}{x-a-b}=0.$

4.3. Diskriminanta i ispitivanje prirode rješenja kvadratne jednačine

Izraz **$D= b^2- 4ac$** nazivamo **diskriminanta** kvadratne jednačine. Za rješenja kvadratne jednačine vrijedi:
1) $D>0 \Leftrightarrow$ x_1, x_2 realni i različiti brojevi.
2) $D=0 \Leftrightarrow$ x_1, x_2 realni i jednaki brojevi.
3) $D<0 \Leftrightarrow$ x_1, x_2 su konjugirano-kompleksni brojevi.

Izračunati diskriminantu D date kvadratne jednačine:

4.69.a) $x^2-3x-5=0$ b) $2x^2-x-1=0$ c) $-x^2+2x-3=0$ d) $-2x^2+x+6=0$

4.70.a) $x^2+10x+25=0$ b) $-5x^2+30x-45=0$ c) $8x^2+5x+11=0$ d) $7x^2-11x-22=0$

4.71.a) $x^2-3ax-a=0$ b) $mx^2-2mx+2=0$ c) $4x^2+5mx+m-2=0$ d) $-3x^2-ax-2a+1$

Ispitujući diskriminantu date kvadratne jednačine odrediti prirodu njenih rješenja:

4.72.a) $x^2+x-1=0$ b) $2x^2-x-3=0$ c) $5x^2-4x+5=0$ d) $x^2+2x+10=0$

4.73.a) $2x^2-2x-3=0$ b) $-4x^2+2+3x=0$ c) $2+x+4x^2=3$ d) $x^2-3x-3=x$

4.74.a) $3x^2+4x+2=0$ b) $x^2+14x+49=0$ c) $12x^2+4x-1=0$ d) $9x^2-12x+4=0.$

4.75. Za koje vrijednosti parametra c jednačina $x^2+3x+c=0$ ima jednaka rješenja?

4.76. Za koje vrijednosti parametra c jednačina $3x^2+x-c=0$ ima realna rješenja?

4.77. Za koje vrijednosti parametra c jednačina $2x^2-8x+c+10=0$ ima realna i različita rješenja?

4.78. Za koje vrijednosti parametra m jednačina $4x^2+x+2m=0$ ima realna rješenja?

4.79. Za koje vrijednosti parametra m jednačina $x^2-2x+3m=0$ nema realna rješenja?

4.80. Za koje vrijednosti parametra b jednačina $2x^2+bx+2=0$ ima jednaka (i realna) rješenja?

4.81. Za koje vrijednosti parametra n jednačina $3x^2-nx+1=0$ ima jednaka rješenja?

4.82. Za koje vrijednosti parametra k jednačina $x^2-2(k-4)x+k^2+6k+3=0$ ima dva jednaka korijena ?

4.83. Za koju vrijednost parametra m jednačina $x^2-5(m^2-4)x-2m+3=0$
a) ima suprotna rješenja (korijena),
b) jedno rješenje jednako nuli.
c) U slučajevima pod a) i b) riješiti jednačinu.

4.84. Pod kojim uslovom za racionalne koeficijente a, b i c su rješenja jednačine $ax^2+bx+c=0$: a) racionalni brojevi   b) iracionalni brojevi ?

4.85. Ne rješavajući jednačinu ukazati koja od njih ima racionalna, a koja iracionalna rješenja:
a) $7x^2+9x+2=0$ b) $x^2-6x-10=0$ c) $x^2-6x-16=0$ d) $7x^2+10x+3=0$?

4.86. Za koje cijele vrijednosti varijable a su rješenja jednačine $ax^2+(2a-1)x+a-2=0$ racionalni brojevi?

4.87.* Ako su a, b i c realni brojevi, dokazati da su rješenja jednačine $x^2+2ax+a^2-b^2-c^2=0$ realni brojevi.

4.88.* Dokazati da jednačina $3x^2+2(a+b+c)x+a^2+b^2+c^2=0$ nema realna rješenja ako su a, b i c međusobno različiti brojevi.

4.89.* Ako su a, b i c dužine stranica trougla, rješenja jednačine $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ su konjugirano-kompleksni brojevi. Dokazati.

4.90.* Date su kvadratne jednačine $x^2+2x+k=0$ i $(1+k)(x^2+2x+k)-2(k-1)(x^2+1)=0$ u kojima je k realan parametar. Dokazati da za proizvoljnu vrijednost parametra k jedna od ovih jednačina ima realna, a druga konjugirano-kompleksna rješenja. Za koje vrijednosti od k obje jednačine imaju dvostruko realno rješenje?

4.4. Normirani oblik kvadratne jednačine (jednadžbe). Vieteove formule

Ako je koeficijent kvadratnog člana jednak jedinici, kažemo da je kvadratna jednačina normirana i pišemo: **$x^2+px+q=0$**, gdje je $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$.

Za rješenja x_1, x_2 normirane kvadratne jednačine vrijedi formula:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Vietove formule: Veza između rješenja i koeficijenata kvadratne jednačine data je formulama:

$$x_1+x_2=-p,\ odnosno,\ x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=q,\ odnosno,\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Napisati datu jednačinu (jednadžbu) u normiranom obliku:

4.91.a) $2x^2-6x+10=0$ b) $-x^2+7x-6=0$ c) $4x^2+8x+15=0$

4.92.a) $61x^2+6x+11=0$ b) $7x^2+12x+77=0$ c) $-100x^2+x+1=0$

Napiši zbir rješenja date jednačine:

4.93.a) $x^2-10x+18=0$ b) $x^2+34x-19=0$ c) $x^2-66x-1997=0$

4.94.a) $x^2-x+1=0$ b) $x^2-88x-3=0$ c) $x^2+2000x-1997=0$

Odrediti proizvod rješenja date jednačine:

4.95.a) $x^2-2x+4=0$ b) $x^2+669x+19=0$ c) $x^2+1998x-1999=0$

4.96.a) $x^2-82x-11=0$ b) $x^2+69x+92=0$ c) $x^2+2000x+1998=0$

4.97. Odrediti zbir rješenja kvadratne jednačine:
a) $2x^2-10x+30=0$ b) $5x^2+15x+17=0$ c) $20x^2+60x+33=0$

4.98. Odrediti proizvod rješenja jednačine:
a) $8x^2+43x+16=0$ b) $-2x^2+67x-66=0$ c) $6x^2+117x-30=0$

Odredi zbir i proizvod rješenja date kvadratne jednačine:

4.99.a) $x^2+884x+222=0$ b) $x^2-55x+76=0$ c) $3x^2+4x+87=0$

4.100.a) $x^2-44x-77=0$ b) $x^2-(m-1)x+19=0$ c) $2mx^2+4(m-1)x+3m-1=0$

Napisati kvadratnu jednačinu koja ima rješenja:

4.101.a) $x_1=5, x_2=1$ b) $x_1=-3, x_2=4$ c) $x_1=-2, x_2=-4$ d) $x_1=7, x_2=-6$

4.102.a) $x_1=3a, x_2=1$ b) $x_1=m-1, x_2=4$ c) $x_1=-1, x_2=m+3$ d) $x_1=m-1, x_2=m+1$

4.103.a) $x_1=2-i, x_2=2+i$ b) $x_1=-3-2i, x_2=-3+2i$
c) $x_1=1+5i, x_2=1-5i$ d) $x_1=4-2i, x_2=4+2i$

4.104.a) $x_1=2+\sqrt{2}, x_2=2-\sqrt{2}$ b) $x_1=-\frac{3}{4}-\sqrt{3}, x_2=-\frac{3}{4}+\sqrt{3}$

4.105.a) $x_{1,2}=\frac{5\pm2\sqrt{10}}{3}$ b) $x_{1,2}=3\pm5\sqrt{2}$ c) $x_{1,2}=\frac{3\pm2i\sqrt{2}}{5}$

4.106. Jedno rješenje kvadratne jednačine $x^2-x-12=0$ je $x_1=4$. Ne koristeći formulu za rješavanje kvadratne jednačine odrediti drugo rješenje.

4.107. Rješenje jednačine $x^2-6x-7=0$ je $x_1=7$. Odredi drugo rješenje.

4.108. Za koje vrijednosti od k jednačina $x^2-7x+k=0$ ima jedno rješenje $x_1=-2$?

4.109. U jednačini $2x^2-11x+m=0$ odrediti vrijednost parametra m ako za rješenja jednačine vrijedi $2x_1 - x_2=2$.

4.110. Za koje vrijednosti parametra a je jedno rješenje kvadratne jednačine

$$x^2-\frac{15}{4}x+a^3=0 \quad \text{jednako kvadratu drugog.}$$

4.111. Rješenja kvadratne jednačine $x^2+9x+14=0$ su x_1 i x_2. Napisati kvadratnu jednačinu čija su rješenja $2x_1$ i $2x_2$.

4.112. Sastaviti kvadratnu jednačinu čije je svako rješenje za tri veće od odgovarajućeg rješenja jednačine $x^2+6x+8=0$.

4.113. Sastaviti kvadratnu jednačinu čije je svako rješenje za dva manje od odgovarajućeg rješenja jednačine $x^2+4x+4=0$.

4.114. Ako su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednačine $x^2-5x+11=0$, odrediti :
a) $x_1^2+x_2^2$ b) $x_1^2-x_2^2$ c)* $x_1^3+x_2^3$

4.115. Ako su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednačine $x^2+px+q=0$, pomoću p i q izraziti : a) $x_1^2+x_2^2$ b) $x_1^2-x_2^2$ c)* $x_1^3+x_2^3$

4.116. Ako su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$, pomoću a, b i c izraziti: a) $x_1^2+x_2^2$ b) $x_1^2-x_2^2$ c)* $x_1^3+x_2^3$

Rješenja jednačine $x^2-3x-10=0$ su x_1 i x_2. Ne rješavajući jednačinu odrediti :

4.117.a) x_1+x_2 b) x_1x_2 c) $x_1^2+x_2^2$ d) $x_1^2-x_2^2$

4.118.a) $(x_1-x_2)^2$ b) $x_1^3+x_2^3$ c) $x_1^3-x_2^3$ d) $(x_1-x_2)^3$

4.119. Neka su α i β rješenja jednačine $x^2-5x+3=0$. Sastaviti kvadratnu jednačinu čija su rješenja $\alpha+2\beta$ i $2\alpha+\beta$.

4.120. Ako su α i β rješenja jednačine $ax^2+bx+c=0$, sastaviti kvadratnu jednačinu čija su rješenja $\alpha+\frac{1}{\alpha}$ i $\beta+\frac{1}{\beta}$.

4.121. U jednačini $3x^2+ax-2=0$ odrediti a tako da za njena rješenja vrijedi $x_1^2+x_2^2=\frac{13}{9}$.

4.122. Ne rješavajući kvadratnu jednačinu $(m-2)x^2-2(m-1)x+m=0$, odredi parametar m tako da njena rješenja zadovoljavaju uvjet $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{5}{4}$.

4.123. Ako su koeficijenti a, b i c kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$, racionalni brojevi, a α i β njena rješenja, ne rješavajući jednačinu dokazati da je izraz $\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3$ racionalan.

4.124. Ako su α i β rješenja kvadratne jednačine s racionalnim koeficijentima $x^2+px+q=0$, dokazati da je izraz $\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4$ racionalan.

4.125. Ako su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednačine $x^2-5x+3=0$, sastaviti kvadratnu jednačinu čija su rješenja x_1^4 i x_2^4.

4.126. Znajući da su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednačine $x^2+px+q=0$, sastaviti kvadratnu jednačinu čija su rješenja:
a) $1+x_1$ i $1+x_2$ b) x_1^2 i x_2^2 c) $\frac{2}{x_1}-1$ i $\frac{2}{x_2}-1$.

4.127. Znajući da su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednačine $x^2+px+q=0$, sastaviti kvadratnu jednačinu čija su rješenja:
a) $x_1+\frac{1}{x_2}$ i $x_2+\frac{1}{x_1}$ b) $\frac{x_1}{x_2}$ i $\frac{x_2}{x_1}$ c) $\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}$ i $\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}$

4.128. Rješenja jednačine $x^2+px+q=0$ su x_1 i x_2. Ne rješavajući jednačinu odrediti vrijednost izraza $x_2^2\left(\frac{x_1^2}{x_2}-x_2\right)+x_1^2\left(\frac{x_2^2}{x_1}-x_1\right)$.

4.129. Odrediti koeficijente p i q i rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine $x^2+px+q=0$, ako su x_1+1 i x_2+1 rješenja jednačine $x^2-p^2x+pq=0$.

4.130. Za koje vrijednosti parametra m jednačine $x^2+mx-2m=0$ i $x^2-2mx+m=0$ imaju zajedničko rješenje?
4.131. Ne rješavajući jednačinu $x^2+px+q=0$, sastaviti kvadratnu jednačinu čiji je jedan korijen (rješenje) jednak zbiru kubova korijena (rješenja) date jednačine, a drugi korijen je jednak kubu zbira tih korijena.
4.132. U jednačini $x^2-x+m-1=0$, odrediti m tako da bude $x_1^3+x_2^3=7$.

4.5. Znaci rješenja kvadratne jednačine (jednadžbe)

Ne rješavajući kvadratnu jednačinu odredi znake njenih rješenja:

4.133.a) $x^2-4x+1=0$ b) $x^2+x-11=0$ c) $2x^2-3x-7=0$ d) $-3x^2+x+1=0$
4.134.a) $-x^2-x+1=0$ b) $12x^2+4x-1=0$ c) $9x^2-12x+4=0$ d) $4x^2+7x+3=0$

4.135. Sastavi jednu kvadratnu jednačinu koja ima pozitivna rješenja.
4.136. Sastaviti jednu kvadratnu jednačinu koja ima negativna rješenja.
4.137. Napiši jednu kvadratnu jednačinu čija su rješenja suprotnih znakova pri čemu je negativno rješenje veće,po apsolutnoj vrijednosti,od pozitivnog..

4.6. Primjena kvadratnih jednačina (jednadžbi)

4.138. Proizvod polovine i trećine nekog broja je 54. Odrediti taj broj.
4.139. Proizvod petine i šestine nekog broja je 120. Odrediti taj broj.
4.140. Ako se neki broj za 2 uveća i za 5 umanji, tada je zbir kvadrata tako dobijenih brojeva 65. Koji je to broj?
4.141. Zbir cifara dvocifrenog broja je 8, a njihov proizvod je 15. Koji je to broj?
4.142. Zbir cifara dvocifrenog broja iznosi 5. Kada se on pomnoži brojem koji je sastavljen od istih cifara u obrnutom redu dobije se broj 736. Koji je to broj?
4.143. Jedna cifra dvocifrenog broja je dva puta veća od druge. Suma kvadrata ovog dvocifrenog broja i broja koji se dobije zamjenom njegovih cifara je 4034. Odrediti dvocifreni broj.
4.144. Odrediti dvocifreni broj ako je cifra njegovih jedinica za 4 manja od cifre desetica i ako je proizvod broja sa zbirom njegovih cifara jednak 306.
4.145. Kvadrat zbira dva uzastopna prirodna broja je za 612 veći od zbira njihovih kvadrata. Odrediti ove brojeve.
4.146. Proizvod dva uzastopna prirodna broja je 240. Koji su to brojevi?
4.147. Zbir kvadrata dva uzastopna parna prirodna broja iznosi 340. Odrediti ove brojeve.
4.148. Zbir kvadrata dva uzastopna neparna prirodna broja je 290. Koji su to brojevi ?
4.149. Zbir kvadrata dva uzastopna prirodna broja je 113. Koji su to brojevi?
4.150. Zbir kvadrata tri uzastopna parna broje iznosi 200. Koji su to brojevi?
4.151. Razlika kubova dva uzastopna prirodna broja je 1387. Koji su to brojevi?

4.152. Ako se svaka stranica trougla produži za isti vrijednost, dobivaju se stranice pravouglog trougla. Za koliko treba produžiti svaku stranicu ako su one a=1, b=3 i c=5?
4.153. Ako se svaka stranica trougla produži za isti vrijednost, dobivaju se stranice pravouglog trougla. Za koliko treba produžiti svaku stranicu ako su one a=10, b=11 i c=19?
4.154. Površina pravouglog trougla je P=30 m^2, a hipotenuza je c=13 m. Izračunati katete trougla.
4.155. Površina pravougaonika je P=50 m^2, a njegov obim iznosi 30 m. Izračunati stranice pravougaonika.
4.156. Dijagonala pravougaonika je d=13, a stranice mu se razlikuju za 7. Odrediti stranice pravougaonika.
4.157. Broj dijagonala konveksnog poligona šest puta je veći od broja njegovih stranica. Koji je to poligon?
4.158. Ako se udvostruči broj stranica konveksnog poligona, broj njegovih dijagonala se poveća za 30. Odrediti broj stranica poligona.
4.159. Kada se ivica kocke smanji za 3, zapremina kocke smanji se za 117. Za koliko se smanjila površina kocke?
4.160. Vrhovi romba su središta stranica pravougaonika. Stranica romba je a=8 cm, a površina P=36 cm^2. Odrediti stranice pravougaonika.
4.161.* Dužina osnovice jednakokrakog trougla je a. U trougao je upisan kvadrat čija je površina n-ti dio površine trougla. Kolika je visina trougla?
4.162. Izvodnica kupe (s) je za 2 m duža od radijusa baze (r). Ako je površina kupe P=24π m^2, izračunati visinu kupe.
4.163. Bazen može da se puni kroz dvije cijevi različitog presjeka. Kada bi se bazen punio samo kroz širu cijev, tada bi se napunio za 5 sati brže nego kroz užu. Ako se obje cijevi otvore istovremeno bazen se napuni za 6 sati. Za koliko sati svaka cijev posebno može napuniti bazen?
4.164. Kroz dvije (otvorene) cijevi bazen se može napuniti za 3 sata. Kada se bazen puni samo kroz prvu cijev potrebno mu je 8 sati više nego za punjenje samo kroz drugu cijev . Za koliko sati će svaka cijev sama napuniti bazen?
4.165. Dva, automobila udaljena međusobno 320 km, kreću jedan drugom u susret. Prvi automobil ima brzinu za 16 km/h veću od brzine drugog. Prvom automobilu potrebno je 3 sata manje vremena da pređe polovinu puta nego drugom da pređe cijeli put (od s=320 km). Odrediti brzine kretanja oba automobila.
4.166. Dva vozača (A i B) kreću u isto vrijeme. Vozač B prelazi svojim vozilom 20 km/h više nego vozač A. Put od 480 km vozač B je prešao za 2 sata prije vozača A. Kolika je brzina vozača A?
4.167. Po kružnici obima 1000 m kreće se tačka M stalnom brzinom. Ako se brzina tačke smanji za 5 m/s vrijeme za koje tačka obiđe jedan puta kružnicu poveća se za 10 sekundi. Kojom brzinom se kreće tačka M po kružnici?
4.168. Snagom svojih motora brod se kreće brzinom od 50 km/h. Rastojanje od 495 km brod prelazi dva puta: prvi puta se kreće uzvodno , a drugi puta nizvodno. Krećući se uzvodno bilo mu je potrebno dva sata više vremena nego kada se kretao nizvodno. Kolika je brzina kretanja vode u rijeci?

4.169. Ako se iz kola struje u kome je napon U=220V odstrani otpor od 1 Ω (oma), jačina struje poraste za 2 A (ampera). Koliki je bio otpor u kolu na početku?
4.170. Ako se u kolo struje u kome vlada napon od 220 V uključi otpor od 5 Ω, jačina struje se smanji za 22 A. Koliki je početni otpor?
4.171. Roba čija je cijena po jednom kilogramu a KM, pojeftini za p%, a za neko vrijeme, pojeftini još za p% i tada ima cijenu b KM po jednom kilogramu. Odrediti p. (Uzeti, specijalno, a=2000 KM, b=1200 KM).

4.7. Kvadratni trinom. Rastavljanje na linearne faktore (činioce)

Ako su x_1, x_2 nule kvadratnog trinoma ax^2+bx+c, tada se ovaj trinom rastavlja na linearne faktore na slijedeći način: $\mathbf{ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)}$.

Dati kvadratni trinom rastavi na linearne faktore (činioce):

4.172 a) x^2-3x+2 b) x^2-6x+5 c) x^2-7x+6 d) $x^2-10x+9$
4.173.a) $x^2+10x+9$ b) $x^2+2x-15$ c) $-x^2+2x+35$ d) $-x^2+x+42$
4.174.a) $8x^2+10x+3$ b) $x^2-25x+114$ c) $2x^2+x-3$ d) $3x^2+x-2$
4.175.a) $2x^2-ax-a^2$ b) $x^2-2ax+a^2$ c) $2a^2x^2+abx-b^2$ d) $2a^2-5abx+3b^2x^2$
4.176.a) $4x^2-2bx+ab-a^2$ b) $2a^3b^3+ab(2a-b)x-x^2$ c) $2abx^2+(2a^2+2ab-3b^2)x+2a^2-3ab$
4.177.a) $x^2-ax-6a^2$ b) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab$ c) $a^2-ab-2b^2$

Skratiti date razlomke (za one vrijednosti varijabli za koje su definirani):

4.178.a) $\frac{x^2-6a+9}{a^2-9}$ b) $\frac{a^2-4}{a^2+4a+4}$ **4.179**.a) $\frac{5a^2-5}{a^2+2a+1}$ b) $\frac{a^2-6a+9}{a^2-9}$

4.180.a) $\frac{a^2-4}{a^2+4a+4}$ b) $\frac{10x^2-1000}{x^2-20x+100}$ c) $\frac{x^2-4x+4}{20x^2-80}$

4.181.a) $\frac{a^2-3a+2}{a^2+2a-8}$ b) $\frac{a^2-3a-10}{2a^2+3a-2}$

4.182.a) $\frac{2a^2-8a-90}{3a^2+36a+105}$ b) $\frac{x^2+bx-2b^2}{x^2+9bx+14b^2}$

4.183.a) $\frac{3x^2-5ax-8a^2}{2x^2+3ax+a^2}$ b) $\frac{2x^2-3ax+a^2}{3ax-x^2-2a^2}$

4.184.a) $\frac{2x^2-2x-12}{3x^2+x-10}$ b) $\frac{5x^2-2x-3}{5x^2+3x}$

4.185.a) $\frac{x^{n+2}+2x^{n+1}+x^n}{x^{n+2}-x^n}$ b) $\frac{7x^{n+2}+6x^{n+1}-13x^n}{x^{n+3}-x^n}$

4.186.a) $\frac{x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}}{3x^2+(3\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}}$ b) $\frac{x^2-(2a-b)x+a^2-ab}{x^2-ax+ab-b^2}$

4.8. Kvadratna jednačina – razni zadaci

4.187. Za koje vrijednosti varijable x dati izraz nije definisan:

a) $\frac{2x^2+7x}{x^2+2x-15}$ b) $\frac{5}{5x+12-2x^2}$ c) $\frac{7x^2-7x}{3x^2+14x+15}$

4.188. Izvršiti naznačene operacije sa racionalnim izrazima:

a) $\left(\frac{x-3}{x^2-2x-3}-\frac{x+3}{x^2+4x+3}\right)\cdot(1-x^2)$

b) $\left(\frac{x^2-6x+5}{x^2-7x+10}-\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}\right)\cdot(x^2-3x+2)$

4.189. $\left(\frac{x-8}{x^3+x^2-x-1}-\frac{1}{x^2-9x+8}\right)\cdot\frac{x^2-7x-8}{2x-7}$

Riješiti date jednačine (jednadžbe):

4.190.a) $\frac{x^3-3}{(x-2)(x-4)}+\frac{x}{2x-4}=\frac{\frac{5}{2}x-6}{x^2-6x+8}$. b) $\frac{5x}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2-2x-3}=\frac{4x-9}{(x-1)(x-3)}$.

4.191.* $\frac{1}{1-8x+16x^2}-\frac{1}{1+8x+16x^2}=\frac{2}{64x^3-16x^2-4x+1}$.

4.192.*a) $\frac{5x}{2x^2-x-1}-\frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{5}{2x+1}$ b) $\frac{2x}{x+b}+\frac{x}{x-b}=\frac{5a^2}{4(x^2-b^2)}$

4.193.*a) $\frac{2}{x^2-2x-4}+\frac{1}{x^2-2x-2}+\frac{3}{x^2-2x}=1$. b) $\frac{3x}{x^2-3x-5}+\frac{2x}{x^2-5x-5}=1$.

4.194.*a) $(x^2-x)^2-3(x^2-x)+2=0$ b) $\frac{15}{x^2-x+1}=(x-1)^2+x^2$

4.195.*a) $(x^2-2x)^2-2(x-1)^2+2=0$ b) $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47$

4.196.* Za koju vrijednost realne varijable m je kvadratni trinom $kx^2-kx+(k-3)$ potpuni kvadrat?
4.197.* U jednačini $2(mx-1)=m(2x-1)^2$ odrediti realni parametar m tako da vrijedi:
a) Jedno rješenje jednačine jednako je nuli. b) Jedno rješenje jednačine jednako je 1.

c) Rješenja jednačine su jednaka   d) Jedno rješenje je dva puta veće od drugog,

e) Jedno rješenje je za dva veće od drugog.

f) Zbir rješenja jednačine je četiri puta veći od njihovog proizvoda.

4.198.* Ako su x_1 i x_2 rješenja jednačine $3x^2-2x+5=0$, ne rješavajući jednačinu

odrediti vrijednost izraza: $\dfrac{x_1^{\;2}}{1+x_2}+\dfrac{x_2^{\;2}}{1+x_1}$.

Riješiti date jednačine (jednadžbe):

4.199.* a) $x^2+6|x|+8=0$ b) $(x-3)^2=|x-3|$ c) $(x+1)^2=|x+3|$

4.200.* a) $|-x^2+1|=-x^2+1$ b) $|x^2-3x+2|=3x-x^2-2$ c) $|2x-x^2-1|=2x-x^2-1$

4.201.* a) $|x^2-1|=-|x|+1$ b) $|x^2-5x+6|=5x-x^2-6$ c) $|5x-x^2-6|=x^2-5x+6$

4.202.* a) $|x-4|\cdot|x+3|=8$ b) $x^2+2x-3|x+1|+3=0$

c) $|x^2-4x+3|+|x^2-5x+6|=1$

4.203.* a) $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8)=4$.   b) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$

4.204.* Kojem intervalu pripada parametar m ako oba rješenja jednačine $x^2-2mx+m^2-1=0$, pripadaju intervalu $[-2, 4]$?

4.205.* Za koje vrijednosti parametra a kvadratne jednačine $x^2-(a+2)x+6=0$ i $x^2-(2a+1)x+10=0$ imaju zajedničko rješenje.

4.206.* Napisati kvadratnu jednačinu čija rješenja x_1 i x_2 zadovoljavaju uvjete: $x_1x_2+x_1+x_2=6a+2$, $x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=0$.

4.207.* Ako su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednačine $x^2+px+q=0$, dokazati ekvivalenciju $(x_2=3x_1) \Leftrightarrow (3p^2-16q=0)$.

4.208.* Dokazati da za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine $x^2-ax+a=0$ vrijedi nejednakost: $x_1^{\;2}+x_2^{\;2}\geq 2(x_1+x_2)$.

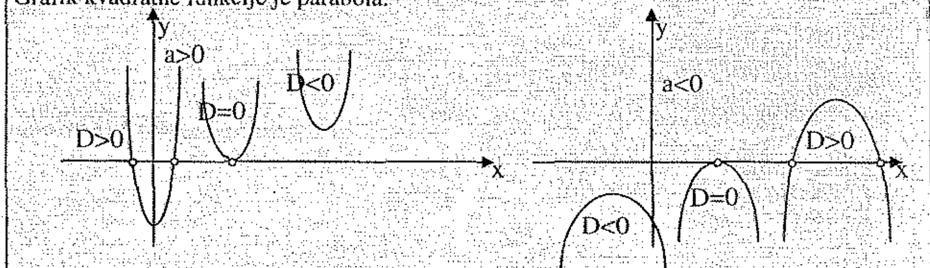
4.209.* Napisati kvadratnu jednačinu čija su rješenja za jedan veća od kvadrata rješenja jednačine $(a-1)x^2-2(a+1)x+a-2=0$ gdje je a realan parametar.

4.210.* Ispitati rješenja kvadratne jednačine $(m-3)x^2-2(m-1)x+m+5=0$ za razne vrijednosti realnog parametra m.

4.211.* Odrediti realan parametar a tako da sva rješenja jednačine $x^3+ax^2-ax-1=0$ pripadaju skupu realnih brojeva.

5. KVADRATNE FUNKCIJE

Funkcija f: R→R definisana relacijom $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, naziva se kvadratna funkcija. Grafik kvadratne funkcije je parabola.



Položaji parabole u zavisnosti od koeficijenta a i diskriminante $D=b^2-4ac$ predstavljeni su na gornjim slikama. Posmatrajući navedene grafike možemo odrediti znak, tok i ekstrem kvadratne funkcije.

Ekstrem kvadratne funkcije $y=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{D}{4a^2}\right]$ je u tački $x=-\dfrac{b}{2a}$ i iznosi $y_{ext}=-\dfrac{D}{4a}$. Ako je a<0 kvadratna funkcija ima maksimum, a u slučaju da je a>0, kvadratna funkcija ima minimum.

5.1. Data je funkcija $f(x)=2x^2-x+5$. Odrediti $f(0)$, $f(-1)$ i $f(2)$.

5.2. Ako je $f(x)=4x^2+2x+c$, odrediti vrijednost varijable c ako je:

a) $f(0)=5$ b) $f(1)=-1$ c) $f(-3)=40$

5.3. Ako je $f(1)=2$, $f(2)=0$ i $f(3)=-4$, odrediti koeficijente a, b i c kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$.

5.4. Odrediti vrijednost člana c ako grafik funkcije $y=ax^2+bx+c$ prolazi tačkom $M(0, -3)$.

5.5. Odrediti vrijednosti koeficijenata b i c funkcije $y=x^2+bx+c$ ako njen grafik prolazi tačkama $A(-4, 0)$ i $B(4, 0)$.

5.6. Data je funkcija $y=ax^2$. Odrediti:

a) Nule funkcije   b) Tok funkcije ako je a>0   c) Tok funkcije ako je a<0

5.7. Skiciraj grafike funkcija:

a) $y=x^2$ b) $y=2x^2$ c) $y=5x^2$ d) $y=0,5x^2$

5.8. Odrediti tok funkcija iz prethodnog zadatka.

5.9. Za koju vrijednost varijable x svaka funkcija iz prethodnog zadatka ima najmanju, a za koju najveću vrijednost?

5.10. Skiciraj grafike funkcija:

a) $y=-x^2$ b) $y=-2x^2$ c) $y=-5x^2$ d) $y=-0,5x^2$

5.11. Odrediti tok funkcija iz prethodnog zadatka.

5.12. Za koju vrijednost varijable x svaka funkcija iz prethodnog zadatka ima najmanju, a za koju najveću vrijednost?

Na istoj slici skicirati grafike datih funkcija :

5.13.a) $y=x^2+2$ b) $y=x^2+3$ c) $y=x^2+5$

5.14.a) $y=x^2-1$ b) $y=x^2-2$ c) $y=x^2-6$

5.15.a) $y=-x^2+3$ b) $y=-x^2-5$ c) $y=-x^2+4$

U istom koordinatnom sistemu skicirati grafike funkcija

5.16.a) $y=x^2$ b) $y=x^2+3$ c) $y=x^2-4$

5.17.a) $y=-x^2$ b) $y=-x^2-2$ c) $y=-x^2+5$

5.18. Odrediti nule kvadratne funkcije:
a) $y=3x^2-27$ b) $y=4x^2-64$ c) $y=-2x^2+32$

5.19. Koliki je maksimum funkcije:
a) $y=-x^2+1$ b) $y=-2x^2+45$ c) $y=-89x^2-2$

5.20. Odrediti minimum funkcije:
a) $y=x^2-7$ b) $y= 5x^2+2$ c) $y=399x^2-12$

5.21. Ispitaj ekstreme funkcije (za razne vrijednosti parametra m):
a) $y=mx^2+4$ b) $y=(m-1)x^2-3$ c) $y=m^2x^2+144$

5.22. Nacrtati grafike funkcija:
a) $y=-2x^2$ b) $y=-2x^2+3$ c) $y=-2x^2-1$

5.23. Odrediti tok funkcija iz prethodnog zadatka.

Skiciraj grafik date funkcije:

5.24.a) $y=(x-1)^2$ b) $y=(x-5)^2$ c) $y=(x-7)^2$

5.25.a) $y=(x+2)^2$ b) $y=(x+3)^2$ c) $y=(x+4)^2$

5.26. Objasni kako se grafik funkcije $y=(x+m)^2$ može dobiti na osnovu grafika funkcije $y=x^2$.

5.27. Nacrtaj grafik funkcije $y=x^2$, pa na osnovu njega, na istoj slici, nacrtaj grafike slijedećih funkcija:
a) $y=(x-1)^2$ b) $y=(x+3)^2$ c) $y=(x+6)^2$

5.28. Nacrtaj grafik funkcije $y=-x^2$, pa na osnovu njega, na istoj slici, nacrtaj grafike slijedećih funkcija:
a) $y=-(x+3)^2$ b) $y=-(x-2)^2$ c) $y=-(x+1)^2$

5.29. Odrediti koordinate tjemena svake parabole iz prethodnog zadatka.

5.30. U kojem intervalu data funkcija opada:
a) $y=(x-7)^2$ b) $y=(x+1)^2$ c) $y=(x-2)^2$

5.31. U kojem intervalu data funkcija raste?
a) $y=-(x+1)^2$ b) $y=-(x-5)^2$ c) $y=(x+11)^2$

5.32. Šta je nula funkcije:
a) $y=(x+5)^2$ b) $y=(x-15)^2$ c) $y=(x+41)^2$?

5.33. Nacrtaj grafik funkcije $y=x^2-12x+36$. Šta je nula ove funkcije?

5.34. Odrediti koordinate tjemena parabole:
a) $y=x^2+4x+4$ b) $y=x^2-6x+9$ c) $y=x^2+10x+25$

5.35. Nacrtaj grafik funkcije $y=x^2$, pa na osnovu njega skiciraj grafike funkcija:
a) $y=(x-1)^2+3$ b) $y=(x+3)^2-5$ c) $y=(x-2)^2+1$

5.36. Nacrtaj grafik funkcije $y=2x^2$, pa na osnovu njega skiciraj grafike funkcija:
a) $y=2(x+3)^2+4$ b) $y=2(x-2)^2-7$ c) $y=2(x-5)^2+2$

5.37. Nacrtaj grafik funkcije $y=-x^2$, pa na osnovu njega skiciraj grafike funkcija:
a) $y=-(x-2)^2+9$ b) $y=-(x+5)^2-2$ c) $y= -(x-3)^2-5$

Odrediti nule date kvadratne funkcije:

5.38.a) $y=x^2-11x+24$ b) $y=x^2-9x+14$ c) $y=x^2+6x+5$

5.39.a) $y=2x^2-3x-5$ b) $y=3x^2-16x+5$ c) $y=5x^2+18x-8$

5.40. Ispitaj da li data kvadratna funkcija ima realne nule:
a) $y=x^2-4x-5$ b) $y=x^2-4x+55$ c) $y=-x^2+2x+11$

5.41. Koliki je maksimum date funkcije:
a) $y=-(x-4)^2+45$ b) $y=-(x+11)^2-12$ c) $y=-(x+6)^2+23$

5.42.a) $y=-x^2-6x-1$ b) $y=-2x^2+x-5$ c) $y=-3x^2+x+1$?

Koliki je minimum date kvadratne funkcije:

5.43.a) $y=(x+1)^2+6$ b) $y=(x-3)^2+2$ c) $y=(x+7)^2+16$?

5.44.a) $y=x^2+x+1$ b) $y=2x^2+3x-17$ c) $y=4x^2-x+2$?

Odrediti ekstreme date kvadratne funkcije:

5.45.a) $y=x^2+4x-2$ b) $y=-x^2-2x-4$ c) $y=-3x^2-12x-9$

5.46.a) $y=x^2+16x+1$ b) $y=-x^2+4x+15$ c) $y=-x^2+6x-14$.

5.47. Odrediti koordinate tjemena parabole:
a) $y=x^2+x+8$. b) $y=2x^2-3x+1$ c) $y=-3x^2-x+5$

Odrediti interval u kojem data funkcija raste:

5.48.a) $y=x^2-8x+12$ b) $y=-x^2+2x+35$ c) $y=40x^2-27x-4$

5.49.a) $y=x^2-6x+8$ b) $y=2x^2-x-1$ c) $y=-3x^2-2x+5$

U kojem intervalu data funkcija opada:

5.50.a) $y=x^2+8x+12$ b) $y=-x^2+2x+35$ c) $y=8x^2+7x-1$

5.51.a) $y=2x^2+5x+3$ b) $y=5x^2+x-6$ c) $y=-2x^2+5x+7$?

5.52. Odredi tačke presjeka date parabole sa x-osom:
a) $y=x^2-21x+90$ b) $y=-x^2+11x-30$ c) $y=5x^2-21x-20$

5.53. U kojoj tački grafik date funkcije siječe y-osu:
a) $y=x^2-x+25$ b) $y=-88x^2+45x-2$ c) $y=-33x^2+1998x+5$?

Nacrtaj grafik date funkcije:
5.54. a) $y=x^2-6x+8$ b) $y=2x^2-x-1$ c) $y=-3x^2-2x+5$
5.55. a) $y=2x^2+5x+3$ b) $y=5x^2+x-6$ c) $y=-2x^2+5x+7$
5.56. Odrediti tok funkcija iz prethodnog zadatka.

5.57. U kojim intervalima je data funkcija pozitivna:
a) $y=x^2-3x+2$ b) $y=-x^2-2x+3$ c) $y=2x^2+5x-7$?

5.58. U kojim intervalima je data funkcija negativna:
a) $y=x^2-3x-10$ b) $y=-x^2+8x-7$ c) $y=x^2-15x+44$?

5.59. Ispitati znak slijedećih funkcija:
a) $y=x^2-4x+4$ b) $y=x^2+4x+5$ c) $y=-x^2+x-2$.

5.60.* Ispitati znak kvadratne funkcije za razne vrijednosti parametra m:
a) $y=-x^2+2mx+2$ b) $f(x)=x^2-2mx+3m$ c) $y=x^2-(m+1)x+2(m-1)$

5.61. Za koje vrijednosti varijable m je funkcija $y=(m-3)x^2+4x+2$ negativna u cijeloj svojoj domeni?
5.62. Za koje vrijednosti varijable m je funkcija $y=mx^2-2mx+m+1$ pozitivna u cijeloj svojoj domeni?
5.63. Odrediti koordinate tjemena, nule, tačku presjeka sa y-osom, a zatim skicirati grafik funkcije $y=x^2-3x-4$.
5.64. Odrediti koordinate tjemena, nule, tačku presjeka sa y-osom, a zatim skicirati grafik funkcije $y=-x^2+9x-8$.
5.65. Kvadratnu funkciju $y=3x^2-4x+9$ dovesti na oblik $y=a(x+\alpha)^2+\beta$, a zatim odrediti: nule, ekstrem, intervale monotonosti, znak i koordinate tjemena.
5.66. Kvadratnu funkciju $y=-4x^2+x-3$ dovesti na oblik $y=a(x+\alpha)^2+\beta$, a zatim odrediti: nule, ekstrem, intervale monotonosti, znak i koordinate tjemena.
5.67. Po planu prethodnog zadatka ispitati funkciju $y=-x^2-8x+3$ i skicirati grafik ove funkcije.
5.68. Odrediti funkciju $y=ax^2+bx+c$ ako njen grafik prolazi tačkama A(-1, -6), B(0, -3), C(1, -4).
5.69. Odrediti funkciju $y=ax^2+bx+c$ ako njen grafik prolazi tačkama A(-1, 2), B(-2, 9), C(-3, 22)
5.70. Kvadratni trinom ax^2+bx+c napisati u obliku $a(x+m)^2+q$, a zatim:
a) napisati koordinate tjemena parabole $y=ax^2+bx+c$.
b) napisati formulu za najveću (najmanju) vrijednost funkcije.
5.71. Odredi vrijednost koeficijenta a tako da kvadratna funkcija $y=ax^2-4x+5$ ima maksimum u tački s ordinatom 7.
5.72. U skupu funkcija $y=-mx^2+(m-n)x-n$, $m,n\in R$, odredi funkciju koja ima maksimum -3 za $x=-1$.
5.73. U skupu funkcija $y=2x^2-(k-1)x+2k-3$, $k\in R$, odredi funkciju koja ima minimum za $x=-1$.

5.74. Jednačina $y=kx^2-2x+1$, $k\in R$ određuje skup parabola. Odrediti skup tačaka ravni što ga čine tjemena ovog skupa parabola.
5.75.* Odrediti skup tačaka ravni što ga čine tjemena skupa parabola određenih jednačinom $y=x^2-3kx+2k^2$, $k\in R$.
5.76.* Napisati jednačinu parabole koja nastaje kada se parabola $y=3x^2$ pomjeri za 2 jedinice udesno i zatim za 6 jedinica naviše.
5.77.* Napisati jednačinu parabole koja nastaje kada se parabola $y=-3x^2$ pomjeri za 3 jedinice ulijevo i zatim za 5 jedinica na dole.
5.78.* Odrediti jednačinu parabole koja je :
a) osno simetrična s obzirom na x-osu,
b) osno simetrična s obzirom na y-osu,
c) centralno simetrična s obzirom na tjeme parabole $y=2x^2-6x+1$.
5.79. Obim pravougaonika je 8 cm. Izrazi površinu pravougaonika kao funkciju jedne njegove stranice. Kada je površina ovog pravougaonika maksimalna?
5.80. Obim pravougaonika je 40 m. Odrediti stranice pravougaonika tako da mu površina bude najveća.
5.81. Kraci skupa jednakokrakih trouglova su po 12 m. Koji od ovih trouglova ima najveću površinu ?
5.82. Broj 16 rastaviti na dva pozitivna dijela tako da suma kvadrata tih dijelova bude najmanja.
5.83. Broj 10 rastavi na dva sabirka tako da je suma njihovih kvadrata minimalna.
5.84. Ako je $2x+4y=1$, dokaza ti da je $x^2+y^2\geq\frac{1}{20}$.
5.85. Nacrtaj grafik funkcije : a) $y=|x^2-9|$ b) $y=|x^2+1|$ c) $y=|x^2-16|$
5.86. Kako izgleda grafik funkcije $y=|-(x-4)^2+5|$?
5.87.*Nacrtaj grafik funkcije : a) $y=|x^2-4x|$ b) $y=|x^2-4x+3|$ c) $y=|-x^2+6x-8|$
5.88. Kvadratna funkcija $y=ax^2+bx+c$ ima jednu nulu $x=-1$ i maksimum 3 za $x=1$. Odrediti koeficijente a, b i c.
5.89.* Jednačinom $y=(x-3)^2+m$, gdje je m realan parametar, određen je skup parabola. Odrediti skup tjemena ovih parabola.
5.90.* Šta je skup tjemena skupa parabola određenog jednačinom
$y=x^2-2(k+1)x+k-3$, gdje je k realan parametar?
5.91.* Odrediti ekstremnu vrijednost funkcije $y=x^2-(m+2)x+m+5$. Za koju vrijednost
realnog parametra m je ekstrem funkcije jednak nuli?
5.92.* U kvadrat stranice a upisati najmanji kvadrat. Kolika je stranica upisanog kvadrata?
5.93.* Koji pravougli trougao, čiji je zbir kateta 10, ima najmanju opisanu kružnicu?
5.94.* U polukrug radijusa R upisati pravougaonik maksimalne površine.

6. KVADRATNA NEJEDNAČINA (NEJEDNADŽBA) I SISTEMI (SUSTAVI) KVADRATNIH NEJEDNAČINA

Nejednačina oblika **$ax^2+bx+c>0$ ili $ax^2+bx+c<0$**, gdje su a, b i c ma koji realni brojevi i $a\neq0$, naziva se kvadratna nejednačina (nejednadžba).

6.1. Koji brojevi su nule kvadratnog trinoma:
a) x^2-8x+7 b) x^2+4x-5 c) $-x^2-10x-21$ d) x^2-x-20

6.2. Odrediti znak kvadratnog trinoma:
a) x^2+4x+4 b) $x^2+10x+25$ c) $-x^2+8x-16$ d) $-2x^2+12x-18$

Riješiti date kvadratne nejednačine:

6.3. a) $x^2+3x>0$ b) $x^2+x<0$ c) $x^2-2x>0$ d) $x^2+7x>0$
6.4. a) $-x^2+5x>0$ b) $4x^2-x<0$ c) $6x^2+5x>0$ d) $-2x^2-8x>0$
6.5. a) $2x-3x^2\geq0$ b) $x+6x^2\geq0$ c) $6x+x^2\leq0$ d) $x^2+2x\leq0$
6.6. a) $x^2-5x\leq0$ b) $x^2-4x\leq0$ c) $x^2+5x\geq0$ d) $-x^2+2x\geq0$
6.7. a) $x^2<4$ b) $x^2>9$ c) $x^2<3$ d) $x^2<8$
6.8. a) $x^2\leq36$ b) $x^2\geq16$ c) $4x^2\leq25$ d) $9x^2\geq16$
6.9. a) $x^2-5x+6<0$ b) $x^2-9x+20<0$ c) $x^2+3x-10<0$ d) $-x^2-7x-6<0$
6.10.a) $x^2-8x+7>0$ b) $x^2+2x-3>0$ c) $x^2+4x-12\geq0$ d) $x^2-5x-24\leq0$
6.11.a) $2x^2+x-3<0$ b) $3x^2-13x+14<0$
c) $25x^2+5x-12<0$ d) $5x^2-31x-28<0$
6.12.a) $4x^2+2x+1>0$ b) $-2x^2+4x-6>0$ c) $-3x^2+2x-1>0$ d) $x^2+4x+5<0$
6.13.a) $15+x^2-8x<0$ b) $5x+x^2-14x-22>0$ c) $5+x+x^2-3x<0$ d) $x-x^2-1<0$

6.14.a) $\frac{x-3}{x-4}>0$ b) $\frac{x-2}{x+1}<0$ c) $\frac{2x-3}{x+5}>1$ d) $\frac{3-x}{x+5}<2$

6.15.a) $\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x+8}>0$ b) $\frac{x^2+4x+5}{x^2-5x+6}<0$

c) $\frac{x^2-x+11}{x^2+3x+7}<0$ d) $\frac{x^2+5x+7}{x^2-2x+3}>0$

6.16.a) $\frac{2}{x^2-7x+12}>0$ b) $\frac{-5}{x^2+7x+10}>0$

c) $\frac{x^2-11x+30}{-4}<0$ d) $\frac{2x^2-x-1}{-887}>0$

Riješiti date sisteme (sustave) nejednačina (nejednadžbi):

6.17.a) $x^2-1<0 \wedge x^2-4<0$ b) $x^2>9 \wedge x^2-16<0$ c) $x^2-x<0 \wedge x^2+x>0$
6.18.a) $x^2-5x+6<0 \wedge x^2-25<0$ b) $x^2+8x+7>0 \wedge x^2-1>0$ c) $2x^2-x-1<0 \wedge x^2+x-2>0$
6.19.a) $x^2+2x+1>0 \wedge x^2-3x+4<0$ b) $x^2-4x-5<0 \wedge x^2-4x<0$
c) $8x^2+x>0 \wedge 2x^2+x-1<0$
6.20.a) $x^2-14x+45<0 \wedge x^2-11x+30>0 \wedge 2x-3>0$
b) $x^2-x-20<0 \wedge x^2-2x-8>0 \wedge 2x^2+x-45<0$

Riješiti slijedeće nejednačine:

6.21.a) $\frac{x-1}{x^2-4}>0$ b) $\frac{x+3}{x^2+6x+8}<0$ c) $\frac{x^2-13x+50}{2x-3}>0$ d) $\frac{2-x}{2x^2-x-6}<0$

6.22.a) $\frac{3x^2-x+2}{x^2-2x+3}<2$ b) $x+\frac{2}{x}>-3$ c) $\frac{x^2-10}{5+x^2}<\frac{1}{2}$ d) $\frac{x+1}{1-x}-2<\frac{1-x}{x}$

6.23.a) $\frac{x^2-1}{8x^2-3x+7}<0$ b) $\frac{x^2-8x+7}{x^2-7x+10}>0$

c) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+5}<0$ d) $\frac{(x-1)(x^2-x+1)}{x^3-1}>0$

6.24.* a) $(x+3)(x-5)(x+2)<0$ b) $(x-4)(x+8)(x-1)(2-x)>0$
c) $(3-x)(x+11)(x-5)(x+33)<0$
6.25.* a) $(x+3)(x+2)(x-4)^2(x-2)(x^2-4x+11)>0$
b) $(x-1)(x-3)(x+7)^2(x+4)(x^2+x+1)<0$

Odrediti definiciono područje (domenu) date funkcije:

6.26.a) $y=\sqrt{x^2-81}$ b) $y=\sqrt{x^2+9}$ c) $y=\sqrt{1-x^2}$
6.27.a) $y=\sqrt{5x^2-6x+1}$ b) $f(x)=\sqrt{-3x^2+6x-3}$ c) $f(x)=\sqrt{4+8x-5x^2}$
6.28.a) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x^2-x-2}}$ b) $y=\sqrt{\frac{x^2+4x+3}{x+1}}$ c) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x^2-12x+11}}$

6.29. Za koje vrijednosti parametra m kvadratna jednačina $mx^2+(1+3m)x+m=0$:
a) ima realna i jednaka rješenja,
b) ima realna i različita rješenja,
c) nema realnih rješenja?

6.30. Za koje vrijednosti parametra m kvadratna jednačina $(m-4)x^2+(1+m)x+2m-1=0$:
a) ima jednaka rješenja,
b) ima realna i različita rješenja,
c) ima konjugirano-kompleksna rješenja?

6.31. Za koje vrijednosti parametra a jednačina $(a-2)x^2-2ax+a-1=0$ ima oba rješenja pozitivna?

6.32. U jednačini $ax^2-(a+1)x+a+4=0$, odrediti realan parametar a tako da rješenja jednačine budu negativna.

6.33. Za koje vrijednosti realnog parametra a kvadratna jednačina
$2x^2-(a^2+8a-1)x+a^2-4a=0$ ima rješenja različitog znaka?

6.34. Odrediti realan parametar m jednačine $x^2-(m-2)x+1=0$ tako da za njena rješenja x_1 i x_2 vrijedi: $x_1^2+x_2^2$ ima minimalnu vrijednost.

6.35. Ako su x_1 i x_2 rješenja jednačine $x^2-(m+1)x-m=0$, odrediti vrijednost parametra m tako da vrijedi $x_1^2+x_2^2<0$.

6.36. Odredi realan parametar m tako da za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine $x^2+2mx+4=0$ vrijedi: $\dfrac{x_1^2}{x_2^2}+\dfrac{x_2^2}{x_1^2}>2$.

6.37. Za koju vrijednost parametra m je kvadratni trinom $(m-1)x^2+4x+2m$ pozitivan za svako realno x?

6.38. Za koju vrijednost parametra m je kvadratni trinom $2mx^2-3x+m$ negativan za svako realno x?

6.39. Odrediti vrijednost parametra m pod uslovom da za svako x bude.
a) $x^2-2(4m-1)x+15m^2-2m-7>0$ b) $-x^2-(m-3)x-m<0$.

6.40.* Za koje vrijednosti realnog parametra m je funkcija

$$f(x)=\frac{x^2-4x+5}{(m+1)x^2-3mx+m+8},$$ pozitivna za svako realno x?

6.41.* Odrediti realne vrijednosti parametra m tako da za svako realno x vrijedi:

$$\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0.$$

Riješiti nejednačine:

6.42.a) $x^2-|x|-6>0$ b) $x^2-|x-1|<3$ c) $|x^2-5x+6|>1$
6.43.*a) $|x^2-x|<3$ b) $|x^2+4x|<2$ c) $|x^2-4x+2|>3$
6.44.*a) $|x^2+2x-1|>2$ b) $x^2+|4x|+3<0$ c) $2x^2+|x|-1>0$

6.45.* Za koje vrijednosti realnog parametra m je data funkcija definisana za svako x: $f(x)=\sqrt{(m+1)x^2-2(m+1)x+3(m-1)}$, $(m\neq -1)$?

6.46.* Datu nejednačinu riješiti za sve vrijednosti parametra a:
a) $ax^2-x-1<0$ b) $2x^2+ax+3<0$ c) $x^2-2x+a>0$ d) $ax^2+ax-5<0$

6.47.* Ispitati rješenja slijedećih kvadratnih jednačina:
a) $x^2-2mx+m^2+9m-36=0$ b) $x^2-2(k-3)x-(5k-11)=0$
c) $(k-2)x^2+(k+1)x-(k+1)=0$

6.48.* Za koje realne vrijednosti parametra k za svako realno x vrijedi:

$$\left|\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}\right|<3\ ?$$

6.49.* Odrediti skup vrijednosti (kodomenu) funkcije:
a) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$ b) $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{2x^2+1}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-x+5}$

6.50.* Data je kvadratna jednačina $f(x)=ax^2+bx+c=0$ čija su rješenja x_1 i x_2 i realan broj α. Dokazati ekvivalencije:

a) $[(x_1,x_2\in R)\wedge(x_1<x_2)\wedge(\alpha\in(x_1,x_2))] \Leftrightarrow af(\alpha)<0$;

b) $(\alpha<x_1\le x_2) \Leftrightarrow \left\{(b^2-4ac\ge 0)\wedge[af(\alpha)>0]\wedge\left(-\dfrac{b}{2a}>\alpha\right)\right\}$.

c) $(x_1\le x_2<\alpha) \Leftrightarrow \left\{(b^2-4ac\ge 0)\wedge[af(\alpha)>0]\wedge\left(-\dfrac{b}{2a}<\alpha\right)\right\}$.

6.51.* Odrediti realan parametar m tako da se broj 3 nalazi između rješenja date jednačine: a) $(m+4)x^2-4mx+m-14=0$ b) $mx^2-4mx+12=0$

6.52.* Za koje vrijednosti realnog parametra m su oba rješenja date jednačine veća od -3: a) $x^2-2(m+1)x-4m-7=0$ b) $x^2+4mx-m+1=0$

6.53.* Odrediti realan parametar m tako da se jedno rješenje jednačine $(m+1)x^2+(3m-1)x+m+3=0$, nalazi između -1 i 0.

6.54.* Za koje vrijednosti realnog parametra m oba rješenja jednačine $f(x)=4x^2-(3m+1)x-(m+2)=0$, pripadaju intervalu (-1, 2)?

7. NEKE JEDNAČINE (JEDNADŽBE) VIŠEG REDA

7.1. Bikvadratna jednačina (jednadžba)

Jednačina oblika $\mathbf{ax^4+bx^2+c=0}$ naziva se **bikvadratna jednačina**.
Smjenom $x^2=t$, bikvadratna jednačina se svodi na kvadratnu po nepoznatoj t.

Riješiti bikvadratne jednačine:

7.1.a) $x^4-16x^2=0$ b) $x^4-36x^2=0$ c) $x^4+49x^2=0$ d) $x^4+64x^2=0$
7.2.a) $x^4+25x^2=0$ b) $x^4-144x^2=0$ c) $x^4-256x^2=0$ d) $x^4+169x^2=0$
7.3.a) $x^4-13x^2+36=0$ b) $x^4-5x^2-36=0$ c) $x^4-5x^2+4=0$ d) $x^4-17x^2+16=0$
7.4.a) $x^4-16x^2-225=0$ b) $x^4-35x^2-36=0$ c) $x^4-24x^2-25=0$ d) $x^4-63x^2-64=0$
7.5.a) $36x^4-13x^2+1=0$ b) $4x^4+7x^2-2=0$ c) $81x^4-45x^2+4=0$ d) $2x^4-19x^2+9=0$
7.6.a) $x^4-3x^2-4=0$ b) $x^4-10x^2+1=0$ c) $4x^4-5x^2-9=0$ d) $3x^4+10x^2+8=0$
7.7.a) $18x^4-7x^2-1=0$ b) $4x^4-5x^2+1=0$ c) $x^4+21x^2-100=0$ d) $x^4+13x^2+36=0$
7.8.a) $x^4-(1+ab)x^2+ab=0$ b) $x^4-(a+b)x^2+ab=0$ c) $x^4-16x^2-m^2x^2+16m^2=0$
7.9.a) $x^4-m^2x^2-9x^2+9m^2=0$ b) $x^4-4x^2-m^2x^2+4m^2=0$ c) $x^4-x^2-a^4x^2+a^4=0$
7.10.a) $x^4-2ax^2+a^2-b^2=0$ b) $x^4-13mx^2+36m^2=0$ c) $x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2=0$
7.11.a) $x^2(x-5)(x+5)-x^2+25=0$ b) $x^2(x-4)(x+4)-24+2x^2(x^2+5)=0$

7.12.a) $(x+1)^4-5(x+1)^2+4=0$ b) $(x-3)^4-10(x-3)^2+9=0$ c) $(2x-1)^4-26(2x-1)^2+25=0$
7.13.*a) $2(x^2-5x-5)^2-(x^2-5x+6)^2-158=0$ b) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=0$

Napisati bikvadratnu jednačinu čija su rješenja :
7.14.a) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm 7$ b) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$ c) $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm 5i$
7.15.a) $x_{1,2}=\pm 4$, $x_{3,4}=\pm 2i$ b) $x_{1,2}=\pm i$, $x_{3,4}=\pm 3i$ c) $x_{1,2}=\pm(2-3i)$, $x_{3,4}=\pm(2+3i)$

Riješiti jednačine:
7.16.a) $x^{-4}-5x^{-2}-36=0$ b) $x^{-4}+5x^{-2}-36=0$ c) $x^{-4}-15x^{-2}-16=0$
7.17.a) $x-5\sqrt{x}+4=0$ b) $\sqrt{x}-8\sqrt[4]{x}-9=0$ c) $2\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt[3]{x^4}-88=0$
7.18.a) $\dfrac{9}{x^2(x-2)}+\dfrac{3(x^2+1)}{2-x}+x+2=0$ b) $\dfrac{5x^3-5x^2+1}{x^2}+\dfrac{4(x^2-2)}{x+1}+\dfrac{10}{x(x+1)}=\dfrac{1+10x}{x^2}$.
7.19. $\dfrac{x^2+1}{a^2(x+1)}+\dfrac{4(x-1)}{a^2}+\dfrac{a^2}{x^2(x+1)}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{3}{x+1}$
7.20. Suma svih rješenja bikvadratne jednačine $x^4+px^2+q=0$ jednaka je nuli, a proizvod je jednak q. Dokazati!
7.21. Suma svih rješenja bikvadratne jednačine $ax^4+bx^2+c=0$ jednaka je nuli, a proizvod rješenja jednak je $\dfrac{c}{a}$. Dokazati!
7.22. Ako je jedno rješenje bikvadratne jednačine 2, a drugo 5, napisati tu jednačinu.
7.23.* Neka su $-x_1$, $-x_2$, x_2, x_1, rješenja bikvadratne jednačine $x^4-(3m+2)x^2+m^2=0$ u kojoj je m realan parametar. Odrediti vrijednost parametra m ako je $x_1=3x_2$.
7.24.* Koji uvjet moraju ispunjavati koeficijenti jednačine
$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, da bi se ona smjenom $x=y+m$ svela na bikvadratnu jednačinu po varijabli y?
7.25.* Pokazati da se jednačina $(x+a)^4+(x+b)^4=c$, smjenom $x=y-\dfrac{a+b}{2}$, svodi na bikvadratnu jednačinu po varijabli y.
7.26.* Na osnovu prethodnog zadatka riješiti jednačine:
a) $(x+1)^4+(x-3)^4=32$ b) $(x+3)^4+(x+5)^4=16$ c) $(x-1)^4+(x+3)^4=82$
7.27.* Odrediti vrijednost realnog parametra m tako da kvadratna jednačina $x^2+(m+1)x-2=0$ ima rješenja x_1 i x_2 koja zadovoljavaju uvjet $(x_1+x_2)(x_1^3+x_2^3)=7$.
7.28.* Riješiti jednačine: a) $\dfrac{2}{x^2+2x-2}+\dfrac{3}{x^2-2x+3}=\dfrac{x}{2}$ b) $x^2+\left(\dfrac{4}{x}\right)^2=17$

7.2. Binomne jednačine (jednadžbe)

Riješiti (binomne) jednačine
7.29.a) $x^3-1=0$ b) $x^3+1=0$ c) $x^3-8=0$ d) $x^3+27=0$
7.30.a) $x^3-64=0$ b) $x^3+64=0$ c) $27x^3-8=0$ d) $27x^3+1=0$
7.31.a) $8x^3-125=0$ b) $64x^3-27=0$ c) $125x^3+343=0$ d) $125x^3-216=0$
7.32.a) $x^3+8a^3=0$ b) $27x^3-a^3=0$ c) $64x^3-27a^3=0$ d) $8x^3-729a^3=0$
7.33.a) $x^6-64=0$ b) $64x^6+1=0$ c) $729x^6-64=0$ d) $4096x^6-729=0$
Odrediti sve vrijednosti korijena:
7.34.a) $\sqrt[3]{1}$ b) $\sqrt[3]{8}$ c) $\sqrt[3]{27}$ d) $\sqrt[3]{64}$
7.35.a) $\sqrt[3]{-27}$ b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt[3]{-216}$ d) $\sqrt[3]{-125}$

7.3. Neke jednačine trećeg stepena (stupnja)

Provjeriti da li su dati brojevi rješenja date jednačine:
7.36.a) $x^3+x-2=0$; {1, -1, 2} b) $x^3-x^2+2x+4=0$; {0, -1, 3}
7.37.a) $2x^3-x-2=0$; {0, 1, 2} b) $2x^3-x^2+x+4=0$; {-2, -1, 1}
7.38.a) $x^3-4x^2+4x-3=0$; {2, 3, -3} b) $x^3+5x^2-7x-14=0$; {1, 2, 3}

Dokazati da slijedeće jednačine nemaju cjelobrojnih rješenja:
7.39.*a) $x^3+5x^2+2x+1=0$ b) $4x^3+3x^2+x-5=0$ c) $x^3-2x^2+7x+4=0$
7.40.*a) $x^4-2x^3+x^2-4x+1=0$ b) $5x^4-x^3-3x^2+x+2=0$ c) $-2x^4+4x^3-x^2+x+3=0$

Odrediti preostala dva rješenja slijedećih jednačina ako je dato jedno rješenje:
7.41.a) $x^3-3x+2=0$, $x_1=1$ b) $x^3+5x+18=0$, $x_1=-2$ c) $x^3+2x^2-3x-10=0$, $x_1=2$
7.42.a) $5x^3-4x-32=0$, $x_1=2$ b) $x^3-x^2+2x-24=0$, $x_1=3$
c) $x^3-6x^2+12x+335=0$, $x_1=-5$.
7.43.a) $x^3-x^2-x-15=0$, $x_1=-1+2i$ b) $x^3-6x^2+13x-10=0$, $x_1=2-i$
c) $x^3-9x^2+33x-65=0$, $x_1=2+3i$. d) $x^3-(3+2\sqrt{2})x^2+3(2\sqrt{2}+1)x-9=0$, $x_1=\sqrt{2}+i$

7.44. Ako je dato jedno rješenje kubne jednačine odrediti vrijednost parametra m i preostala dva rješenja:
a) $mx^3+2x^2-x-2=0$, ako je $x_1=-1$. b) $2x^3+mx^2+13x+15=0$, ako je $x_1=-5$.
c) $x^3+2x^2+mx+2=0$, ako je $x_1=-2$. d) $x^3+9x^2+11x+m=0$, ako je $x_1=-7$.

7.45. Rastavljanjem lijeve strane jednačine na faktore riješiti jednačine:
a) $x^3-7x^2-9x+63=0$ b) $6x^3+2x^2-25x-50=0$
c) $x^3+2x^2-13x+10=0$ d) $x^3-x^2-17x-15=0$
7.46. Tragajući za jednim rješenjem među faktorima slobodnog člana riješiti datu jednačinu:
a) $x^3-2x^2+5x-4=0$ b) $2x^3+x^2-4x-12=0$ c) $x^3+3x^2+5x+3=0$

d) $x^3-x^2+2x+16=0$ e) $-x^3+2x^2+3x-10=0$ f) $5x^4-x^3-3x^2+x-2=0$

7.47. Riješiti date jednačine:

a) $3x^3+2x^2+2x+3=0$ b) $3x^3-7x^2-7x+3=0$ c) $2x^3-4x^2-x-15=0$

d) $x^3-5x^2-5x+1=0$ e) $2x^3+3x^2+3x+2=0$ f) $x^3-4x^2-x+4=0$

7.48. Odrediti a, $b\in Z$ tako da jednačina $x^3-ax^2-x+b=0$ ima dva rješenja: $x_1=2$ i $x_2=3$, a zatim odrediti i treće rješenje x_3.

7.4. Simetrične jednačine (jednadžbe)

7.49. Koju vrijednost mora imati parametar m da bi data jednačina bila simetrična:

a) $mx^3-7x^2-7x+1=0$ b) $2x^3+mx^2+6x+2=0$ c) $-x^3+mx^2-21x-1=0$

d) $8x^4-3x^3-11x^2+mx+8=0$ e) $4x^4-x^3+80x^2+mx+4=0$ f) $2x^3+(m-3)x^2-4x+2=0$

Riješiti date simetrične jednačine:

7.50.a) $x^3-x^2-x+1=0$ b) $x^3+x^2+x+1=0$ c) $x^3-4x^2-4x+1=0$

d) $x^3+7x^2+7x+1=0$ e) $x^3+2x^2+2x+1=0$ f) $-x^3+3x^2+3x-1=0$

7.51.a) $x^3+21x^2+21x+1=0$ b) $6x^3-19x^2+19x-6=0$ c) $2x^3+7x^2+7x+2=0$

7.52.a) $3x^5-7x^4-4x^3-4x^2-7x+3=0$ b) $2x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+2=0$

7.53.a) $2x^4-3x^3-x^2-3x+2=0$ b) $3x^4+4x^3-14x^2+4x+3=0$ c) $x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0$

7.54.a) $x^4+4x^3-4x-1=0$ b) $\frac{3x+2}{2x+3}=x^2$ c) $x^3-3x^2-x+3=0$

7.55.a) $x^3+x^2-2x-8=0$ b) $x^3-2x^2-(a^2-a-1)x+a^2-a=0$

7.56.*a) $4x^6-8x^5-13x^4+34x^3-13x^2-8x+4=0$ b) $x^6-6x^5+14x^4-18x^3+14x^2-6x+1=0$

7.57.* a) $2x^6-6x^5+11x^4-12x^3+11x^2-6x+2=0$ b) $x^8+4x^6-10x^4+4x^2+1=0$

8. SISTEMI (SUSTAVI) KVADRATNIH JEDNAČINA (JEDNADŽBI)

Provjeriti da li je dati uređeni par (x, y) rješenje datog sistema:

8.01.a) $2x-3y=11$, $xy+3=0$, (1, -3) b) $6x+2y=-6$, $x^2+4y^2=40$, (-2, 3) c) $3x+y=5$, $2x^2+y^2=3$, (1, -1)

8.02.a) $x^2-2y^2=2$, $xy+2=0$, (2, -1) b) $x^2+y^2=25$, $4x^2-y^2=20$, (-3, 4) c) $x-11y=4$, $x^2+y^2=10$, (3, -1)

Riješiti dati sistem (sustav) jednačina (jednadžbi):

8.03.a) $x-y=1$, $xy-12=0$ b) $2x+y=5$, $4x^2-y^2=15$ c) $3x-2y+4=0$, $5x^2-y^2+5=0$

8.04.a) $\left.\begin{array}{r} xy=12 \\ x-2y-2=0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y-5=0 \\ x^2+4y^2-3x-2=0 \end{array}\right\}$

8.05.a) $\left.\begin{array}{r} 2y-x=2 \\ 2xy=3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 5x-3y-5=0 \\ 5xy+2=0 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} x+5y+2=0 \\ 5xy+8=0 \end{array}\right\}$

8.06.a) $\left.\begin{array}{r} x+y=8 \\ x^2-y^2=16 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ x^3+y^3=65 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 5x+6y-1=0 \\ 3x^2+2xy+5y^2-6=0 \end{array}\right\}$

8.7.a) $\left.\begin{array}{r} x+y=6 \\ x^2+y^2=2(xy+2) \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x-y+1=0 \\ 2x^2-xy+3y^2-7x-12y+1=0 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} x+y-5=0 \\ x^2-xy+y^2-7=0 \end{array}\right\}$

8.8.a) $\left.\begin{array}{r} x+y=-a \\ xy=-2a^2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} y-x=2b \\ xy=a^2-b^2 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} x-y=a \\ x^2+y^2=5a^2 \end{array}\right\}$

8.9.a) $\left.\begin{array}{r} 4x-2y=-7a \\ 4x^2+4xy+y^2=7a^2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x+y=2a \\ x^2-2a^2+y^2=2 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=a \\ x^2-y^2=3a^2 \end{array}\right\}$

8.10.a) $\frac{4}{x-1}-\frac{5}{y+1}=1 \quad \wedge \quad \frac{4}{x+5}=\frac{2}{y}$ b) $\frac{1-x+x^2}{1-y+y^2}=7 \quad \wedge \quad \frac{x-1}{y+1}-1=0$

8.11.a) $\begin{cases} xy - x + y = 7 \\ xy + x - y = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy - 12 = 0 \\ x^2 + 3xy + y^2 - 61 = 0 \end{cases}$

8.12.a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 38 \\ xy = 1 \end{cases}$

8.13.a) $x+xy+y=11$, $x-xy+y=1$ b) $xy+x+y=11$, $x^2y+y^2x=30$ c) $xy+x-y=3$, $x^2y-xy^2=2$

8.14.a) $5xy+3x^2=57$, $15xy-x^2=81$ b) $x^2+xy+x=10$, $y^2+xy+y=20$ c) $x^2-xy+2y^2=0$, $2x^2+3xy-5y^2=0$

8.15.a) $x^2-2xy+3y^2=9$, $x^2-4xy+5y^2=5$ b) $2x^2+3xy+2y^2=4$, $4x^2-4xy-y^2=8$ c) $x^2-xy+y^2=3$, $2x^2-xy-y^2=5$

8.16.a) $2x^2-3xy+3y^2=80$, $x^2+xy-2y^2=-56$ b) $2x^2-xy+y^2=28$, $x^2+3xy-3y^2=28$ c) $3x^2-3xy+2y^2=8$, $2x^2-3xy+3y^2=8$

8.17.*a) $x^2+4xy-2y^2=5(x+y)$, $5x^2-xy-y^2=7(x+y)$ b) $x^3-3xy^2=1$, $3x^2y-y^3=1$ c) $xy(x+y)=30$, $x^3+y^3=35$

8.18.* a) $2x^3y^2-y^3x^2=36$, $2x^2y-y^2x=6$ b) $x^3+y^3=6$, $x+y=2$ c) $x^2y+xy^2=1$, $x^3+y^3=1$

8.19.*a) $2x^2-xy+y^2=7$, $x^3+y^3=35$ b) $x^3+y^3=7$, $xy(x+y)=-2$ c) $x(x^2+3y^2)=14$, $y(y^2+3x^2)=13$

8.20.* $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{26}{5} \;\wedge\; xy=6$ **8.21.*** $\sqrt{\frac{2x-y}{2y-x}}+\sqrt{\frac{2y-x}{2xy-}}=2 \;\wedge\; \sqrt{x}+\sqrt{y}=4.$

8.22.*a) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(x + y) = 3 \\ x(x + z) = 1 \\ x(y + z) = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 61 \\ xy + xz = 2xy \end{cases}$

8.23.*a) $\begin{cases} x + y = 2axy \\ y + z = 2byz \\ y + z = 2cxz \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy = 15 \\ yz = 24 \\ yz = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = axy \\ y + z = byz \\ x + z = cxz \end{cases}$

Izračunati drugi korijen datog kompleksnog broja:

8.24.a) i b) $3-4i$ c) $8+6i$

8.25.a) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{1-i}$ c) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}$

9. IRACIONALNE JEDNAČINE (JEDNADŽBE)

Jednačinu koja sadrži korijene koji u radikandu imaju promjenljivu nazivamo **iracionalna jednačina**. Nakon određivanja domene iracionalne jednačine, jednačinu rješavamo oslobađanjem korijena. To postižemo stepenovanjem jednačine. Ovdje posmatramo, uglavnom, iracionalne jednačine sa kvadratnim korijenima

Odrediti oblast definisanosti (domenu) date iracionalne jednačine (jednadžbe):

9.1.a) $\sqrt{x-1}=17$ b) $\sqrt{x+7}=14$ c) $23-\sqrt{x+12}=66x$

U kojoj oblasti je definirana data jednačina (jednadžba):

9.2.a) $\sqrt{x^2+1}=7x$ b) $\sqrt{x+3}+5=\sqrt{1-x}$ c) $\sqrt{x-5}=\sqrt{5-x}+17$

9.3. Dokazati da data jednačina (jednadžba) nema realnih rješenja:

a) $7+\sqrt{x-5}=\sqrt{2-x}$ b) $\sqrt{3-x}=\sqrt{x^2-11x+30}$

U skupu realnih brojeva riješiti date iracionalne jednačine (jednadžbe):

9.4.a) $\sqrt{x}=4$ b) $\sqrt{x}-3=5$ c) $\sqrt{x+1}=1$ d) $\sqrt{3-x}=2$

9.5.a) $\sqrt{2x+1}=7$ b) $\sqrt{6x-11}=5$ c) $\sqrt{57x+7}=11$ d) $\sqrt{1-33x}=\sqrt{34}$

9.6.a) $\sqrt{x+2}=x$ b) $\sqrt{1-3x}=3x+1$ c) $\sqrt{2-5x}=x-2$ d) $\sqrt{x-10}=x+8$

9.7.a) $\sqrt{5x+1}=\sqrt{2x+10}$ b) $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{5}$

c) $\sqrt{5+x}=\sqrt{x-5}$ d) $\sqrt{1-2x}=\sqrt{x-3}$

9.8.a) $\sqrt{2x+1}=1-x$ b) $\sqrt{1+3x}=x+1$

c) $\sqrt{12-x}=x$ d) $\sqrt{x+3}=3x$

9.9.a) $\sqrt{5-x}=0$ b) $(x^2-4)\sqrt{x-2}=0$ c) $(9-x^2)\sqrt{-x-3}=0$

9.10.a) $2\sqrt{x+5}=x+2$ b) $3\sqrt{x-1}=x+1$ c) $-2\sqrt{x-1}=x+1$

9.11.a) $\sqrt{4x^2-27x+18}=x-2$ b) $\sqrt{x^2+x-3}=3$ c) $\sqrt{6-x-x^2}=x+1$

9.12.a) $\sqrt{3x-5}+7=9$ b) $10-\sqrt{6x-5}=5$ c) $7-\sqrt{x^2+2x+2}=6$

9.13.a) $\sqrt{3+\sqrt{2x-5}}=2$ b) $\sqrt{21-\sqrt{3x+4}}=4$ c) $\sqrt{\sqrt{x-1}+22}=5$

9.14.a) $\sqrt{5-x^2}=\sqrt{3-x}$ b) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x}$ c) $\sqrt{x^2-13}-\sqrt{13}=0$

9.15.a) $2-x+\sqrt{4+2x-x^2}=0$ b) $x-1-\sqrt{1+4x-x^2}=0$

c) $\sqrt{x^2+8}-2x-1=0$

9.16.a) $\sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{2x-x^2}$ b) $3\sqrt{x^2-3x}=x+2$

9.17.a) $\sqrt{2x-3}+1=\sqrt{x+2}$ b) $\sqrt{x+1}-2\sqrt{3x-5}=-2$

9.18.a) $\sqrt{x+3}+\sqrt{22-x}=7$ b) $\sqrt{x}+\sqrt{2x+8}=6$ c) $3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7$

9.19.a) $\sqrt[3]{x^3-5x-4}=x-1$ b) $2\sqrt[3]{x+3}=\sqrt[3]{x^2+39}$ c) $\sqrt{11-\sqrt[3]{x^2+7}}=3$

9.20.a) $x+1=\dfrac{9-x}{\sqrt{x+3}}$ b) $\dfrac{4-x}{2+\sqrt{x}}=8-x$ c) $\sqrt{3x-5}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$

9.21.a) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{3x+4}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{2-x}}=\dfrac{\sqrt{x+6}}{x+4}$ c) $\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+1}}=\sqrt{2x+1}$

9.22.a) $\sqrt{x^2-2x-1}+5=\dfrac{14}{\sqrt{x^2-x-1}}$ b) $\sqrt{2+\sqrt{x+\sqrt{2x^2+3x+2}}}=2$

9.23.a) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$ b) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$

9.24.a) $\sqrt{23+\sqrt{2x+\sqrt{5x^2-21x-68}}}=5$ b) $\sqrt{5-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}}=1$

9.25.a) $\sqrt{41-3x}-\sqrt{9-3x}=2\sqrt{5+x}$ b) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+31}$

9.26.a) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$ b) $\sqrt{4x+5}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}$

9.27.a) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$ b) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25}$

9.28.a) $\sqrt{7x+2}-\sqrt{13-2x}=\sqrt{x-1}$ b) $\sqrt{1-x}-\sqrt{x+12}=\sqrt{9+x}$

9.29.*a) $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$

b) $\sqrt{2x^2+5x+2}-\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{3x+6}$

9.30.*a) $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=1$ b) $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{3}$

9.31.*a) $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$ b) $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}+5\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}=\dfrac{9}{2}$

9.32.*a) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{5x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{5x+10}$ b) $\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+10}+\sqrt{6-x}=\sqrt{x+52}$

9.33.*a) $\sqrt{x+15}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}$ b) $\sqrt{x+12}-\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}=\sqrt{x}$

9.34.*a) $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ b) $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}}=\dfrac{21}{x}$

9.35.*a) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$ b) $x=a+\sqrt{a+\sqrt{x}}$

9.36.*a) $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$ b) $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$

9.37.*a) $\sqrt{4(x+m)+n}-\sqrt{4(m-x)+n}=4\sqrt{m}$

b) $bx\sqrt{a+x}+ab\sqrt{a+x}=a\sqrt{x^3}$

9.38.*a) $\sqrt[3]{x^2-2x-3}=x+1$ b) $\sqrt[3]{76+\sqrt{x}}+\sqrt{76-\sqrt{x}}=8$

9.39. Za koje realne vrijednosti parametra a jednačina $\sqrt{x^2-1}=a-x$ ima rješenje?

10. IRACIONALNE NEJEDNAČINE (NEJEDNADŽBE)

Nejednačinu (nejednadžbu) u kojoj se nepoznata pojavljuje u potkorjenoj veličini (radikandu) nekog korijena nazivamo iracionalna nejednačina (nejednadžba).
Za iracionalne nejednačine vrijedi:

$$\left.\sqrt[2n]{f(x)}<\sqrt[2n]{g(x)},n\in N\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)>f(x)\end{cases}$$

$$\left.\sqrt[2n+1]{f(x)}<\sqrt[2n+1]{g(x)},n\in N\right\}\Leftrightarrow f(x)<g(x).$$

$$\left.\sqrt[2n]{f(x)}<g(x),n\in N\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)>0\\ f(x)<[g(x)]^{2n}\end{cases};$$

$$\left.\sqrt[2n+1]{f(x)}<g(x),n\in N\right\}\Leftrightarrow f(x)<[g(x)]^{2n+1}.$$

$$\left.\sqrt[2n]{f(x)}>g(x),n\in N\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}g(x)<0\\ f(x)\geq 0\end{matrix}\right\}\vee\left\{\begin{matrix}g(x)\geq 0\\ f(x)>[g(x)]^{2n}\end{matrix}\right\}$$

$$\left.\sqrt[2n+1]{f(x)}>g(x),n\in N\right\}\Leftrightarrow f(x)>[g(x)]^{2n+1}.$$

Odrediti oblast definisanosti (domenu) iracionalne nejednačine (nejednadžbe):

10.1.a) $\sqrt{x-11}>5$ b) $\sqrt{1-x}<3$ c) $\sqrt{x-6}<2$

10.2.a) $\sqrt{2x-6}>9$ b) $\sqrt{4-2x}<11$ c) $\sqrt{x^2+6}<22$

10.3.a) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}>1$ b) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-5}>7$ c) $\sqrt{x+6}-\sqrt{1-x}\geq 2$

10.4.a) $\sqrt{7-x}+\sqrt{x}<\sqrt{x+3}+1$ b) $\sqrt{5x-10}+\sqrt{4+x}+\sqrt{6x-30}>81$

Riješiti date iracionalne nejednačine (nejednadžbe):

10.5.a) $\sqrt{x}>3$ b) $\sqrt{x+1}>2$ c) $\sqrt{x-5}>1$

10.6.a) $\sqrt{x-4}<2$ b) $\sqrt{x-3}>1$ c) $\sqrt{2x+5}<3$

10.7.a) $\sqrt[3]{x-5}<-1$ b) $\sqrt[3]{6-x}>-4$ c) $\sqrt[3]{2x+1}<-8$

10.8.a) $\sqrt{2x+2}\geq x-3$ b) $\sqrt{x+2}>x$ c) $\sqrt{x-1}<x+3$

10.9.a) $x+2<\sqrt{x+14}$ b) $x-2<\sqrt{x^2-3x-10}$ c) $1-x<\sqrt{x+8}$

10.10.a) $\sqrt{3x-3}<\sqrt{x+5}$ b) $\sqrt{2x-12}>\sqrt{x+10}$ c) $\sqrt{x-10}<\sqrt{2x+3}$

10.11.a) $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$ b) $\sqrt{2x^2+5x-6}>2-x$ c) $\sqrt{x^2-4}<x-3$

10.12.a) $4x-6>\sqrt{6x-2x^2}$ b) $2x+1>\sqrt{x^2+3x+3}$ c) $x+3>\sqrt{x^2-11}$

10.13.a) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+8}>3$ b) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}<3$ c) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}<5$

10.14.a) $x\sqrt{\frac{x+5}{x+6}}<0$ b) $\sqrt{\frac{1-x}{2x-5}}<3$ c) $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$

10.15.*a) $\frac{\sqrt{27-2x-x^2}}{3-x}<1$ b) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$ c) $\frac{2-\sqrt{x^2-9}}{x}<5$

10.16.*a) $\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geq 2$ b) $\frac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}}\leq 3x+2$ c) $\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{x-2}\leq 1$

10.17.*a) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}>\sqrt{2x+4}$ b) $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$

10.18.*a) $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$ b) $\sqrt{9-x^2}+\sqrt{6x-x^2}>3$

10.19.*a) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$ b) $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}$

10.20.a) $x\sqrt{1-x^2}<0$ b) $(1-x^2)\sqrt{x}<0$

10.21.a) $(x+1)\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x+7}\leq 0$ b) $8+6\cdot\left|3-\sqrt{x+5}\right|>x$

10.22.*a) $5\left|\sqrt{1-x}-2\right|>3x$ b) $-\left|\sqrt{2-x}+1\right|<x-3$

10.23.*a) $\sqrt{5x^2+10x+1}\geq 7-x^2-2x$ b) $\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{3x-2}<\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$.

11. EKSPONENCIJALNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

Funkciju $f: R\to R^+$ definisanu jednačinom $f(x)=a^x$; $a>0$, nazivamo **eksponencijalna funkcija.**
Jednačinu (jednadžba) u kojoj se nepoznata nalazi u eskponentu stepena, nazivamo **eksponencijalna jednačina (jednadžba).**
Ovdje se pojavljuju eksponencijalne jednačine koje su napisane ili se mogu napisati u obliku $a^{f(x)}=a^{g(x)}$.
Pri rješavanju eksponencijalnih jednačina koristimo ekvivalenciju:

$$a^{f(x)}=a^{g(x)},\ (a>0, a\neq 1)\Leftrightarrow f(x)=g(x).$$

Nejednačinu (nejednadžba) u kojoj se nepoznata nalazi u eskponentu stepena, nazivamo **eksponencijalna nejednačina (nejednadžba).**
Pri rješavanju eksponencijalnih nejednačina koristimo ekvivalencije:

$a^{f(x)}<a^{g(x)},\ (a>1)\ \Leftrightarrow\ f(x)<g(x)$; $a^{f(x)}>a^{g(x)},\ (a>1)\ \Leftrightarrow\ f(x)>g(x)$

$a^{f(x)}<a^{g(x)},\ (0<a<1)\ \Leftrightarrow\ f(x)>g(x)$, **odnosno,** $a^{f(x)}>a^{g(x)},\ (0<a<1)\ \Leftrightarrow\ f(x)<g(x)$.

11.1. Eksponencijalna funkcija

Nacrtati grafik date eksponencijalne funkcije:

11.1.a) $y=2^x$ b) $y=3^x$ c) $y=4^x$ d) $y=5^x$.

11.2.a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ c) $y=\left(\frac{2}{5}\right)^x$ d) $y=\left(\frac{4}{11}\right)^x$

11.3. Opiši tok funkcija iz prethodna dva zadatka.

11.2. Eksponencijalna jednačina (jednadžba) oblika $a^{f(x)}=a^{g(x)}$

Provjeri da li je dati broj rješenje date eksponencijalne jednačine:

11.4.a) $x=-1$, $3^{x+1}=1$ b) $x=0$, $4^x=78^x$ c) $x=1$,$56^{3x-3}-2^{5-3x}+3=0$

11.5.a) $x=1$, $2\cdot 8^x-15=1$ b) $x=2$, $7^x-3\cdot 7^{x-1}=28$ c) $x=-3$, $6\cdot 2^x+4\cdot 8^x=400$

Riješi datu eksponencijalnu jednačinu:

11.6.a) $2^x=16$ b) $4^x=16$ c) $7^x=49$ d) $8^x=64$

11.7.a) $7^{2x}=49$ b) $6^{x+1}=36$ c) $8^{2x-1}=64$ d) $3^{x-5}=27$

11.8.a) $2\cdot 4^{2x}=64$ b) $3\cdot 6^{3x}=108$ c) $2\cdot 8^{x+1}=16$ d) $5\cdot 9^{x-5}=135$

11.9.a) $5^{2x}=25$ b) $2^{3x-1}=32$ c) $36^{x+1}=6$ d) $9^{x+2}=3$

11.10.a) $0{,}2^{x}=5$ b) $0{,}5^{2x}=4$ c) $0{,}25^{x-1}=16$ d) $0{,}1^{x}=1000$

11.11.a) $25^{x}=\frac{1}{5}$ b) $\left(\frac{2}{7}\right)^{x}=\left(\frac{7}{2}\right)^{3}$ c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{x-1}=\frac{4}{25}$

11.12.a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-1}=\left(\frac{5}{4}\right)^{x+7}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}=\left(\frac{9}{4}\right)^{x-2}$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-4}=\left(\frac{4}{3}\right)^{4x-3}$

11.13.a) $\sqrt[3]{128}=4^{2x}$ b) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-2x}=\sqrt{\frac{1}{8}}$ c) $4^{\sqrt[x]{2}}=256$

11.14.a) $\left(\frac{3}{14}\right)^{x+2}=\frac{196}{9}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2x}=2^{x-1}$ c) $\sqrt{4^{x(x-1)-\frac{1}{2}}}=\sqrt[4]{2}$

11.15.a) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{5}{x}}}=\left(\frac{9}{4}\right)^{-4}$ b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{8}{x}}}=\frac{9}{16}$

c) $8\cdot\sqrt{(0{,}25)^{5-\frac{x}{2}}}=2^{\sqrt{x-1}}$

11.16.a) $7^{x^2-4x+6}=343$ b) $2^{x^2-7{,}7x+17{,}5}=16\sqrt{2}$ c) $\left(5^{x^2+x-2}\right)^{3-x}=1$

11.17.a) $3^{x}\cdot\sqrt[3]{8^{x}}=36$ b) $2^{x}\cdot 5^{x}=0{,}1\cdot\left(10^{x-2}\right)^{4}$ c) $\sqrt[3]{2^{x}}\cdot\sqrt[3]{3^{x}}=1296$

11.18.a) $2^{1-x^2}2^{2x}=64^{-1}$ b) $3\cdot 2^{x}=4\cdot\sqrt[\frac{x}{2}]{3}$ c) $\sqrt[x]{27^{2x-1}}=\sqrt{9^{2x-1}}$

11.19.a) $3^{x}-2\cdot 3^{x-2}=7$ b) $4^{x}-3\cdot 4^{x-2}=13$ c) $4\cdot 3^{x-1}+3^{x+1}=117$

11.20.a) $2^{x+1}+5\cdot 2^{x-2}=104$ b) $5^{x+1}-3\cdot 5^{x-2}=122$ c) $3^{x+1}-4\cdot 3^{x-2}=69$

11.21.a) $5^{x+1}+5^{x}=750$ b) $5^{x+1}+5^{x-2}=630$ c) $5^{2x+1}-5^{2x-1}=120$

11.22.a) $4^{x-1}+4^{x}+4^{x+1}=84$ b) $2^{x-2}+2^{x}+2^{x+1}=104$

11.23.a) $5^{x+1}+5^{x}+5^{x-1}=155$ b) $6^{x-1}+6^{x}+6^{x+1}=258$

11.24.a) $6^{x-1}+6^{x+1}+6^{x+2}=1518$ b) $7^{x}+7^{x-2}+7^{x+1}=7\cdot 393$

11.25.a) $3\cdot 4^{x+1}+2\cdot 4^{x}-48\cdot 4^{x-1}=128$ b) $5\cdot 3^{x-1}+7\cdot 3^{x}-2\cdot 3^{x+1}=216$

11.26.a) $3\cdot 2^{x+3}+2^{x}-4\cdot 2^{x-2}=768$ b) $3^{2x}-2\cdot 3^{2x-1}-2\cdot 3^{2x-2}=1$

11.27.a) $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=896$ b) $3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}=315$

11.28.a) $3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^{x}+5^{x-1}+5^{x-2}$

b) $3^{x+2}-3^{x+1}-3^{x}=5^{x+2}-5^{x+1}-17\cdot 5^{x}$

11.29.a) $7^{x}+7^{x+1}=2^{x+4}+2^{x+3}+2^{x+2}$ b) $21\cdot 3^{x}+5^{x+3}=3^{x+4}+5^{x+2}$

11.30.a) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$ b) $4^{x}-3^{x+\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x+1}$

11.31.a) $3\cdot 4^{x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$ b) $9^{x}-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}$

11.32.a) $4^{x}-9\cdot 2^{x}+8=0$ b) $9^{x}-10\cdot 3^{x}+9=0$ c) $16^{x}-12\cdot 4^{x}+32=0$

11.33.a) $5\cdot 2^{x+1}-4^{x}=16$ b) $4^{x-1}-5\cdot 2^{x-2}=6$ c) $3^{2x}-4\cdot 3^{x}=45$

11.34.a) $4^{x}+2^{x+3}=20$ b) $9^{x}+27=12\cdot 3^{x}$ c) $4^{x}+32=12\cdot 2^{x}$

11.35.a) $2^{x}-8\cdot 2^{-x}=7$ b) $3^{x}-9\cdot 3^{-x}=8$ c) $5^{x}-5^{3-x}=20$

11.36.*a) $4^{x}+6^{x}=2\cdot 9^{x}$ b) $5\cdot 6^{2x}-11\cdot 30^{x}+6\cdot 5^{2x}=0$

c) $4^{2x+1}+2^{2x+6}=4\cdot 8^{x+1}$

11.37.*a) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}=4$ b) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{x}+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^{x}=34$

11.38.*a) $8^{x}+18^{x}-2\cdot 27^{x}=0$ b) $2^{2x+2}-6^{x}=2\cdot 3^{2x+2}$

c) $2\cdot 81^{x}-36^{x}=3\cdot 16^{x}$

11.39.*a) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$ b) $4\cdot 3^{x}-9\cdot 2^{x}=5\cdot 6^{\frac{x}{2}}$

11.40.*a) $2^{2x+1}+3^{2x+1}=5\cdot 6^{x}$ b) $4^{2x+1}+2^{2x+6}=4\cdot 8^{x+1}$

11.41.*a) $3\cdot 4^{x}-2\cdot 9^{x}=5\cdot 6^{x}$ b) $2^{x}-3\cdot 2^{0{,}5(x-3)}=26$

11.42.*a) $2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}-6\cdot\left(2^{x}-\frac{1}{2^{x-1}}\right)=1$ b) $2^{x}-2\cdot(0{,}5)^{2x}-(0{,}5)^{x}-1=0$

11.43.*a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}+3^{x-3}=99+\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{4-x}}$ b) $\sqrt{8^{x}\cdot\sqrt[3]{64^{x}\cdot\sqrt[x]{0{,}5}}}=2\cdot\sqrt[3]{16}$

11.44. Odrediti cjelobrojna rješenja jednačine $x^{2000}=(x+2000)^{2000}$.

11.3. Eksponencijalna nejednačina (nejednadžba) oblika

$$a^{f(x)}<a^{g(x)}\ ,\ a^{f(x)}>a^{g(x)}$$

Riješiti date eksponencijalne nejednačine:

11.45.a) $2^{x}>4$ b) $3^{x}<9$ c) $4^{x}<16$ d) $5^{x}>125$

11.46.a) $4^{x}>8$ b) $9^{x}<27$ c) $16^{x}<8$ d) $125^{x}>25$

11.47.a) $25^{x}>125^{3x-2}$ b) $5^{4x-6}>25^{3x-4}$ c) $3^{x+3}7^{x+3}<3^{2x}7^{2x}$

11.48.a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}>4$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}<\frac{4}{9}$ c) $\left(\frac{4}{5}\right)^{1-2x}>\frac{25}{16}$ d) $\left(\frac{2}{7}\right)^{x+3}<\left(\frac{7}{2}\right)^{x-5}$

11.49.a) $0{,}1^{x+2}<10$ b) $0{,}25^{x-3}>16$ c) $0{,}01^{2x}>0{,}1^{x-1}$ d) $0{,}125^{1-x}\le 4$

11.50.a) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2x}<2^{3}$ b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3x}>\frac{1}{3}$ c) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-x+1}\le\frac{1}{4}$ d) $3^{2x-5}<\left(\frac{1}{27}\right)^{x+1}$

11.51.a) $3^{\frac{x+1}{x}} < 3$ b) $2^{\frac{2x-3}{x}} > 4$ c) $16 < 2^{\frac{x-1}{2x}}$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{2}} < 3^x$

11.52.a) $15^x < 4^x$ b) $11^x > 7^x$ c) $23^x < 19^{-x}$ d) $18^{2x-1} > 5^{1-2x}$

11.53.a) $2^{x^2+1} < 2^5$ b) $3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}$ c) $5^{x^2-2x} < 1$ d) $8^{1-3x} > 1$

11.54.a) $36^{0.5x^2} < \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$ b) $(0{,}36)^{0{,}5x^2-3} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$ c) $(0{,}25)^{3-0{,}5x^2} < 8$

11.55.a) $8 \cdot 2^{x^2-3x} < (0{,}5)^{-1}$ b) $9 \cdot 3^{x^2-4x} < \frac{1}{3}$ c) $125 \cdot 5^{2x^2-x+1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

11.56.a) $3^{2x-x^2} < 9$ b) $2^{3x-x^2} > 8$ c) $4^{x^2-1} < 8^{x+2}$

11.57.a) $2^x + 2^{x+3} < 9$ b) $3^{x+1} + 3^{x-1} > 10$

11.58.a) $5 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-2} < 74$ b) $2^{x+3} - 5^x < 7 \cdot 2^{x-2} - 3 \cdot 5^{x-1}$

11.59.a) $3^{x+2} + 7^x > 4 \cdot 7^{x-1} + 34 \cdot 3^{x-1}$ b) $6 \cdot 5^{x+1} - 5^{x+2} + 6 \cdot 5^x \geq 55$

11.60.a) $9^{x+1} + 3^{x+2} - 18 > 0$ b) $25^{-x} - 5^{-x+1} > 50$ c) $9^x - 2 \cdot 3^x < 3$

11.61.a) $5^x - 5^{3-x} < 20$ b) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} \leq 0$ c) $9^x - 3 < 2 \cdot 3^x$

12. LOGARITAM, LOGARITAMSKA FUNKCIJA. LOGARITAMSKE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

Definicija logaritma: ***Eksponent kojim treba stepenovati bazu a (0<a≠1) da bi se dobio pozitivan broj b, nazivamo logaritam broja b za bazu a***, odnosno,

$$\log_a b = x \iff a^x = b \quad , (0<a\neq 1,\ b>0).$$

Na osnovu navedene definicije, neposredno zaključujemo da vrijedi:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Definicija logaritamske funkcije:

Funkciju f: $R^+ \to R$, definisana jednačinom $f(x)=\log_a x$, nazivamo **logaritamska funkcija**.

Logaritamska pravila:

$I)\quad \log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N \quad ,(M > 0, N > 0, 0 < a \neq 1)$

$II)\quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad ,(M > 0, N > 0, 0 < a \neq 1)$

$III)\quad \log_a M^n = n \cdot \log_a M \quad ,(M > 0, 0 < a \neq 1)$

$IV)\quad \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M \quad ,(M > 0, n \neq 0, 0 < a \neq 1)$

Prelazak s jedne logaritamske baze, na primjer a, na drugu (recimo b) vrši se po formuli: $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \quad ,(M > 0, 0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1)$

Neposredno iz navedene relacije slijedi: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad ,(0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1)$.

Jednačinu (jednadžbu) u kojoj se nepoznata nalazi kao dio logaritmanda, nazivamo **logaritamska jednačina (jednadžba)**.

Pri rješavanju logaritamskih jednačina koristimo slijedeću ekvivalenciju:

$$\mathbf{\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff f(x) = g(x),\ f(x)>0,\ g(x)>0,\ 0<a\neq 1}.$$

Nejednačine (nejednadžbe) u kojima se pojavljuju logaritmi koji u logaritmandu sadrže varijablu nazivamo **logaritamske nejednačine (nejednadžbe)**.

Kako je logaritamska funkcija u odnosu na bazu a>1 rastuća, a u odnosu na bazu 0<a<1 opadajuća, to vrijedi:

$$\left.\begin{matrix}\log_a f(x) < \log_a g(x) \\ a > 1\end{matrix}\right\} \iff \begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 1 \\ f(x) < g(x)\end{cases} ; \quad \left.\begin{matrix}\log_a f(x) < \log_a g(x) \\ 0 < a < 1\end{matrix}\right\} \iff \begin{cases} g(x) > 0 \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x)\end{cases}$$

12.1. Pojam logaritma i logaritamske funkcije. Osobine i grafik logaritamske funkcije

12.1. Odrediti inverznu funkciju date funkcije definisane u skupu realnih brojeva R:

a) y=x b) y=x+1 c) y=x-4 d) y=3x+1

12.2. Nacrtati grafik funkcije y=x+3, pa na osnovu njega odrediti grafik njene inverzne funkcije.

12.3. Na osnovu poznatog (već skiciranog) grafika funkcije $y=x^2$ definirane na skupu R^+ odrediti grafik njene inverzne funkcije.

Date jednakosti napisati u obliku logaritamskih:

12.4.a) $2^5=32$ b) $4^2=16$ c) $3^4=81$ d) $5^3=125$

12.5.a) $10^5=100000$ b) $5^0=1$ c) $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ d) $7^3=343$

Slijedeće jednakosti napisati u obliku eksponencijalnih:

12.6.a) $\log_3 9=2$ b) $\log_2 8=3$ c) $\log_4 64=3$ d) $\log_{10}10000=4$

12.7.a) $\log_3\frac{1}{9}=-2$ b) $\log_{\frac{1}{3}}9=-2$ c) $\log_4\frac{1}{256}=-4$ d) $\log_{\frac{1}{3}}125=-3$

Izračunati slijedeće logaritme:

12.8.a) $\log 100$ b) $\log_2 64$ c) $\log_3 27$ d) $\log_4 256$

12.9.a) $\log_3 1$ b) $\log_3\frac{1}{9}$ c) $\log_3\sqrt[3]{9}$ d) $\log_3\frac{1}{3\sqrt{3}}$

12.10.a) $\log_2 32$ b) $\log_4 32$ c) $\log_8 32$ d) $\log_{16}32$

12.11.a) $\log 1$ b) $\log_5 1$ c) $\log_8 1$ d) $\log_6 1$

12.12.a) $\log_2\frac{1}{32}$ b) $\log_3\frac{1}{81}$ c) $\log_5\frac{1}{25}$ d) $\log\frac{1}{10000}$

12.13.a) $\log_{\frac{1}{2}}2$ b) $\log_{\frac{1}{2}}8$ c) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$ d) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{64}$

12.14.a) $\log_{\frac{1}{7}}\sqrt[3]{49}$ b) $\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{125}$ c) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{81}$ d) $\log_{\frac{1}{4}}256$

12.15.*a) $\log_{49}\sqrt[4]{\frac{1}{7}}$ b) $\log_{\frac{1}{16}}\sqrt[3]{64}$ c) $\log_{\frac{3}{2}}\sqrt[5]{\frac{16}{81}}$ d) $\log_{\frac{2}{3}}\sqrt[4]{\frac{8}{27}}$

Izračunati vrijednost varijable x ako je:

12.16.a) $\log_2 16=x$ b) $\log_3 27=x$ c) $\log_5 125=x$ d) $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{8}=x$

12.17.a) $\log_3 x=4$ b) $\log_5 x=-2$ c) $\log_4 x=\frac{1}{2}$ d) $\log_{\frac{2}{5}}x=-1$

12.18.*a) $\log_x\sqrt{8}=\frac{3}{4}$ b) $\log_x\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$ c) $\log_x\frac{1}{125}=-2$ d) $\log_x\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}$

Izračunati vrijednost datog izraza:

12.19.a) $\log_2\log_9 81$ b) $\log_4\log_2 16$ c) $\log_4\log_9 81$ d) $\log_9\log_4 64$

12.20.a) $\log_2\log_2\log_2 16$ b) $\log_5\log_2\log 16$ c) $\log_2\log_2\sqrt{2}$ d) $\log_3\log_4\log_2 2^{64}$

12.21.*a) $\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$ b) $\log_3\log_3\sqrt[3]{\sqrt[9]{3}}$ c) $\log_2\log_2\sqrt[16]{4}$ d) $\sqrt{\log_{0,04}25+1}$

Na osnovu jednakosti $\mathbf{a^{\log_a N}=N}$, izračunati vrijednosti datih izraza:

12.22.a) $4^{\log_4 2}$ b) $2^{\log_2 8}$ c) $5^{\log_5 10}$ d) $10^{\log 15}$

12.23.a) $2^{3\log_2 3}$ b) $44^{2\log_{44}3}$ c) $5^{3\log_5 2}$ d) $10^{-2\log 4}$

12.24.a) $2^{2-\log_2 5}$ b) $5^{\log_5 10-2}$ c) $4^{3-\log_4 32}$ d) $8^{2+\log_2 5}$

12.25.a) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}}$ b) $8^{\log_2\sqrt[3]{121}+\frac{1}{3}}$ c) $27^{\log_3\sqrt[3]{12}-\frac{2}{3}}$ d) $100^{\log\sqrt{3}+1}$

Izračunati vrijednost datog izraza:

12.26.*a) $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}\cdot 49^{\log_7 2}$ b) $8^{2-2\log_4\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{3}\cdot 7^{\log_{49}4}$

c) $100^{\frac{1}{2}-\log\sqrt[4]{4}}+125^{\log_{25}16}$

Odrediti nule date logaritamske funkcije:

12.27.a) $y=\log_2 x$ b) $y=\log_3(x-5)$ c) $y=\log(2x+10)$ d) $y=\log(x^2-8)$

12.28.a) $y=\log_4\frac{x}{3}$ b) $y=\log_3\frac{2x}{x-1}$ c) $y=\log\frac{1-x}{1+x}$ d) $y=\log_3\frac{x^2-2x}{3x-6}$

Odrediti oblast definisanosti (domenu) funkcije:

12.29.a) $y=\log_3(2-x)$ b) $y=5\cdot\log_2(x-1)$ c) $y=(x-5)\cdot\log(4x-16)$

12.30.a) $y=\log_2\frac{x+1}{x-2}$ b) $y=\log_4\frac{x-2}{x+3}$ c) $y=\log_2\frac{3-x}{x+1}$

12.31.a) $y=\log_2(x^2-3x-4)$ b) $y=\log_3(-x^2+7x-12)$

c) $y=\log(-2x^2+x+1)$ d) $y=\frac{x-1}{x}\log(x+3)$

12.32.a) $y=\frac{x^2-1}{x+5}\log(x^2-4)$ b) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x}}\log(2x-1)$

12.33.*a) $y=\sqrt{x-|x|}\cdot\log_5(x-2)$ b) $y=\sqrt{x-|x|}\cdot\log(x+1)$

c) $y=\sqrt{(x^2-3x)\log^2(x-1)}$

Nacrtati grafik funkcije:

12.34.a) $y=\log_2 x$ b) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ c) $y=\log_4 x$ d) $y=\log x$

12.35.a) $y=\log x-1$ b) $y=\log_2(x-1)$ c) $y=\log_2(x+1)$ d) $y=|\log_2 x|$

Na istom crtežu nacrtati grafik datih funkcija:

12.36.a) $y=\log_2 x$ i $y=2\cdot\log_2 x$ b) $y=\log_2 x$ i $y=\frac{1}{2}\cdot\log_2 x$

12.37.a) $y=\log x$ i $y=2\cdot\log(x-5)$ b) $y=\log x$ i $y=\log(x+5)$

12.2. Pravila logaritmiranja. Prelazak s jedne logaritamske baze na drugu

Koristeći proizvoljnu bazu logaritmiraj date izraze:

12.38.a) $3\cdot 4$ b) $4\cdot 345$ c) $11\cdot 237{,}5$ d) $78{,}43\cdot 66{,}12$

12.39.a) $6\cdot 7\cdot 43$ b) $184\cdot 425\cdot 67{,}13$ c) $3478\cdot 317{,}2\cdot 98{,}128$

12.40.a) $5^3\cdot 7$ b) $42\cdot 6^4$ c) $78{,}2\cdot 9^{12}$ d) $3{,}4^{1{,}2}\cdot 7{,}1$

12.41.a) $2\cdot\sqrt{3}$ b) $34\cdot\sqrt{567{,}2}$ c) $448{,}11\cdot\sqrt[3]{276{,}5}$

12.42.a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{34}{65}$ c) $\frac{56{,}72}{33{,}95}$ d) $\frac{7{,}128}{34{,}53}$

12.43.a) $4xy^3$ b) $56x^2y^5$ c) $43a^4bc^5$ d) $13{,}2a^8b^{11}c^{-2}$

12.44.a) $\frac{5x^2}{3y^4}$ b) $\frac{11ab^3}{8x^2y}$ c) $\frac{66a^3b^5c}{5x^3y^4}$ d) $\frac{26{,}17a^5b^7x}{3{,}8c^6y^5}$

Koristeći bazu 10 logaritmiraj slijedeće izraze:

12.45.a) $43a^2b^3$ b) $\frac{17x^4}{2a^5}$ c) $\frac{6\sqrt{a}}{7a^3}$ d) $\sqrt{\frac{2a}{3x^5}}$

12.46.*a) $\frac{\sqrt{a\sqrt{a}}}{4}$ b) $\frac{7\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}{8y}$ c) $\frac{6{,}1\sqrt[3]{2b\sqrt{a}}}{5y^4}$ d) $\frac{89\sqrt{7\sqrt{a\sqrt{b}}}}{3\sqrt{a}}$

Odrediti izraz x ako je poznato logx:

12.47.a) logx=log5+log2 b) logx=log12+log4 c) logx=log25+log2

12.48.a) logx=2log4 b) logx=3log2 c) logx=-2log9

12.49.a) logx=log4+log5-log2 b) logx=log2+log4-log7

12.50.a) $\log x=\frac{1}{2}\log 9$ b) $\log x=\frac{1}{3}\log 8$ c) $\log x=\frac{2}{3}\log 64$

12.51.a) $\log x=4\log 3-\frac{1}{2}\log 64$ b) $\log x=\frac{1}{2}\log 81+2\log 2$ c) $\log x=\frac{1}{4}\log 16+\frac{2}{3}\log 27$

12.52.a) $\log x=\frac{1}{4}\log 81+\frac{1}{5}\log 32+\frac{2}{3}\log 8.$ b) $\log x=\frac{2}{5}\log 32-\frac{3}{4}\log 16+\frac{4}{7}\log 128.$

12.53.a) $\log x=\frac{3}{4}(\log 2+\log m-\log 4)$ b) $\log x=\log(a+b)-\frac{2}{3}\left(2\log a+\frac{3}{4}\log b\right)$

12.54. $\log x=-\log 5+\frac{2}{5}\left[2\log a+\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{3}(\log a-\log b)-\log a\right]$

12.55.* $\log x=-\log 5+\frac{2}{3}\left[2\log a+\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{3}(\log a-\log b)-\log a\right]$

Uprostiti izraze:

12.56.a) $\log_4\log_4\sqrt{4}$ b) $\log_3\log_2\sqrt[3]{2}$ c) $\log\log\sqrt[3]{1000}$

12.57.a) $\frac{3\log_7 2-\log_7 24}{\log_7 3+\log_7 9}$ b) $\frac{\log_4 45+2\log_4\frac{1}{3}}{\log_4 75-\log_4 3}$

Prelazeći sa jedne logaritamske baze na drugu izračunati:

12.58.a) $\log_3 25\cdot\log_{25} 9$ b) $\log_2 10\cdot\log 16$ c) $\log_5 36\cdot\log_6 125$

12.59.a) $\log_8 27\cdot\log_9 16$ b) $\log_4 125\cdot\log_{25} 2$ c) $\log_{27} 1000\cdot\log 81$

12.60.a) $4^{\log_8 27}$ b) $16^{\log_4 25}$ c) $9^{\log_{81} 256}$

Šta je veće:

12.61.a) $\log_3 8$ *ili* $\log_3 112$ b) $\log_{\frac{2}{3}} 7$ *ili* $\log_{\frac{2}{3}} 9$ c) $\log_5 11$ *ili* $\log_5 4$?

12.62.a) $\log_5 12$ *ili* $\log_6 12$ b) $\log_3\frac{4}{7}$ *ili* $\log_7\frac{4}{7}$ c) $\log_{25} 100$ *ili* $\log_{22} 100$?

Odrediti znak slijedećeg brojnog izraza:

12.63.a) $\log 27{,}13$ b) $\log_3 1{,}94$ c) $\log_5 0{,}59$ d) $\log_2\frac{17}{35}$

12.64.a) $\log_{\frac{1}{2}} 97$ b) $\log_{0{,}74}\frac{4}{7}$ c) $\log_{\frac{5}{8}} 66{,}83$ d) $\log_{\frac{1}{10}} 0{,}0005$

12.65. *Ako* $\log_a 27=b$, izračunati $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{a}$.

12.66. *Ako* $\log_2 3=m$, *koliko je* $\log_{24} 54$?

12.67. *Ako je* $\log 5=a$ *i* $\log 3=b$, *odrediti* $\log_{30} 8$.

12.68. *Ako je* $\log 2=a$, $\log_2 7=b$, *odrediti* $\log 56$.

12.69. *Ako je* $\log_5 4=a$ *i* $\log_5 3=b$, *odrediti* $\log_{25} 12$.

Dokazati slijedeće relacije:

12.70.a) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ b) $\log_{a^k} a^n = \dfrac{n}{k}$

12.71.a) $\log_3 5 = \dfrac{\log_6 5}{1-\log_6 2}$ b) $a^{\frac{\log_b \log_b a}{\log_b a}} = \log_b a.$

12.72.a) $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_8 5 = \dfrac{1}{3}$ b) $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7 = \dfrac{1}{3}$

12.73.a) $\dfrac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1+\log_a b$ b) $\log_{\frac{1}{m}} \dfrac{1}{n} = \log_m n$

12.74.a) $\log_{bn} an = \dfrac{\log_b a + \log_b n}{1+\log_b n}$ b) $\log_{b^{n+1}} ab^n = \dfrac{\log_b a + n}{1+n}$

12.75. $a^2+b^2=7ab \iff \log_c \dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}(\log_c a + \log_c b)$

12.76. $ab=c^2 \implies \log_{ab} c = \dfrac{1}{2}.$

12.77. $a^2+b^2=c^2 \iff \log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a\cdot\log_{c-b} a.$

12.78. $\left(y=10^{\frac{1}{1-\log x}},\ z=10^{\frac{1}{1-\log y}}\right) \implies x=10^{\frac{1}{1-\log z}}.$

12.79. $\left(b=\sqrt{ac}\right) \implies \dfrac{2}{\log_b N} = \dfrac{1}{\log_a N}+\dfrac{1}{\log_c N}.$

12.3. Dekadski logaritmi (logaritmi u odnosu na bazu 10)

12.80. Ako je log2 = 0,30103 , odrediti:
a) log4 b) log8 c) log32 d) log128

12.81. Ako su poznati logaritmi: log3=0,47712 i log2=0,30203 odrediti:
a) log6 b) log18 c) log36 d) log108

Odredi karakteristiku broja logx ako je:

12.82.a) x=43,11 b) x=4,77 c) x=561,98 d) x=9000,34
12.83.a) x=0,234 b) x=0,00491 c) x=0,5691 d) x=0,002005

Pročitaj karakteristiku izdatih logaritama broja x:

12.84.a) logx=2,12987 b) logx=0,32456 c) logx=3,92388
12.85.a) logx=0,99342-2 b) logx=0,22444-1 c) logx=0,77225-3

Odrediti logaritam datog broja:[1]

12.86.a) 11 b) 123 c) 4578 d) 66712
12.87.a) 234 b) 2,34 c) 23,4 d) 0,234
12.88.a) 98,22 b) 987,4 c) 245,3 d) 9,097
12.89.a) 0,00567 b) 0,0008876 c) 0,0400567 d) 0,02099

Odrediti broj x ako je poznat logx:

12.90.a) logx=2,30103 b) logx=1,53033 c) logx=0,18298
12.91.a) logx=0,20358-1 b) logx=0,71113-3 c) logx=0,76020-4
12.92.a) logx=1,44 b) logx=0,672 c) logx=3,489
12.93.a) logx=-0,675 b) logx=-5,333 c) logx=-15,39

Odrediti logaritam datog brojnog izraza:

12.94.a) $34\cdot 53$ b) $45{,}22\cdot 89{,}25$ c) $78{,}12\cdot 9{,}271$

12.95.a) $\dfrac{43}{57}$ b) $\dfrac{34{,}55}{8{,}433}$ c) $\dfrac{9{,}887}{4{,}876}$

12.96.a) 4^{12} b) $2\cdot 3^{5,1}$ c) $5^{3,2}\cdot 12{,}3$

12.97.a) $\sqrt{43{,}17}$ b) $\sqrt[3]{14{,}46}$ c) $\sqrt[4]{88{,}7\cdot 3{,}175}$

12.98.a) $\dfrac{8{,}73}{0{,}987\cdot 35{,}11}$ b) $34{,}57\cdot\sqrt[3]{83{,}28}$ c) $\dfrac{\sqrt{4{,}93}\cdot\sqrt[3]{7{,}982}}{2{,}63\cdot\sqrt[5]{91{,}37}}$

Primjenom logaritama izračunati vrijednost izraza x ako je:

12.99.a) $x = 66{,}3\cdot 18{,}94$ b) $x = 0{,}9734\cdot 67{,}72$ c) $x = 7{,}4815\cdot 812{,}4$

12.100.a) $x=\dfrac{88{,}45}{34{,}7}$ b) $x=\dfrac{25{,}3}{321{,}8}$ c) $x=\dfrac{44{,}2^2}{18{,}55}$

12.101.a) $x=83{,}45^{3,5}$ b) $x=6{,}3\cdot 5{,}04^3$ c) $x=7{,}11^{2,1}\cdot 0{,}543^3$

12.102.a) $x=\sqrt{941}$ b) $x=\sqrt{819{,}4}$ c) $x=\sqrt{24{,}877}$

12.103.a) $x=\sqrt[3]{125}$ b) $x=\sqrt[3]{654{,}92}$ c) $x=\sqrt[4]{38{,}799}$

12.104.a) $x=\dfrac{183{,}2\cdot 4{,}231}{45{,}21}$ b) $x=\dfrac{66{,}543\cdot 5{,}329}{3{,}991\cdot 0{,}905}$ c) $x=\dfrac{0{,}8782\cdot 3{,}887}{2{,}114\cdot 0{,}07393}$

12.105.a) $x=\dfrac{3{,}45\cdot 11{,}43^2}{18{,}54^4}$ b) $x=\dfrac{0{,}078^5\cdot 67{,}41^2}{71{,}9^3\cdot 5{,}335}$ c) $x=\dfrac{721{,}45^{1,3}\cdot 77{,}4^{2,2}}{34{,}6^3\cdot 1{,}118^7}$

12.106.*a) $x=\dfrac{70{,}15^2\cdot\sqrt{0{,}0987}}{2{,}115\cdot\sqrt{678{,}3}}$ b) $x=\dfrac{\sqrt{0{,}112}\cdot\sqrt[3]{87{,}21}}{3{,}981^2\cdot\sqrt[4]{871{,}7}}$

c) $x=\dfrac{\sqrt{6{,}008}\cdot\sqrt[3]{3{,}0887^2}}{\sqrt[4]{3{,}09^{23}\cdot 0{,}21^5}}$

[1] Prilikom određivanja logaritama koristiti kalkulatore (ili logaritamske tablice).

12.107.*a) $x=\sqrt[3]{345,9+\sqrt{67,3\cdot 11,09^3}}$ b) $x=\frac{0,99452^3}{\sqrt{34,335}}+\sqrt[3]{\frac{11,78}{3,445^2}}$

12.4. Logaritamske jednačine (jednadžbe)

Riješiti date logaritamske jednačine (jednadžbe):

12.108.a) $\log x=3$ b) $\log(x+1)=2$ c) $\log 2x=1$

12.109.a) $\log(x-1)=4$ b) $\log(2-x)=-1$ c) $\log(x+5)=0$

12.110.a) $\log x+\log 4=0$ b) $2\log x+\log 2=\log 98$ c) $3\log x-\log 5=\log 25$

12.111.a) $\log_3(x^2-1)=1$ b) $\log_5(x^2+1)=1$ c) $\log_7(2x^2-1)=1$

12.112.a) $\log x+\log 4=3$ b) $\log x+\log 16=\log 48$

c) $2\log x+\log 6=\log 150$

12.113.a) $\log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)=2$ b) $\log(3x+1)^2=0$ c) $\frac{1}{5}\log_x\frac{1}{32}=-\frac{1}{2}$

12.114.a) $\log(4-x)-\log(x-6)=5$ b) $\log(x-3)-\log(x-2)=\log(x+9)$

c) $\log_5(x^4+5)+\log_5(25+x^2)=\frac{3}{2}$

12.115.a) $\log\frac{x}{4}+\log\left(\frac{x}{2}-1\right)=0$ b) $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=2$

c) $\log_3(9-2x)+\log_3 x=2$

12.116.a) $\frac{\log 2x}{\log(4x-15)}=2$ b) $\frac{2\log x}{2-\log 5}=2$ c) $\frac{\log x}{1-\log 2}=2$

12.117.a) $\log_5\frac{x+1}{x}=\log_5\frac{x}{2-x}$ b) $\log_{\frac{2}{5}}\sqrt{2x-1}=\log_{\frac{2}{5}}(x-2)$

c) $\log_{11}(x^2-3)=\log_{11}(3x-5)$

12.118.a) $\log_3(x-1)=\log_3\frac{x}{1+x}$ b) $\frac{\log(2x-5)}{\log(x^2-8)}=\frac{1}{2}$ c) $\frac{\log(x-3)}{\log(x^2-21)}=\frac{1}{2}$

12.119.a) $\frac{1}{2}\log(x+3)=1-\frac{1}{2}\log(x+24)$ b) $\log\left(\frac{1}{2}+x\right)=\log\frac{1}{2}-\log x$

12.120.a) $\frac{\log_3(35-x^2)}{\log_3(5-x)}=3$ b) $\frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log\sqrt[3]{x-40}}=3$ c) $\frac{\log\sqrt{x+7}-\log 2}{\log 8-\log(x-5)}=-1$

12.121.a) $\log(x^2-2x)=\log(2x+12)$ b) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x)=-1$ c) $\log_6(x^{-2}+2)=1$

12.122.a) $\log_2(x+1)-\log_2(x-1)=1$ b) $\log_5(7x+4)-\log_5(2x-1)=1$

c) $\log_3(10x+3)-\log_3(x-6)=1$

12.123.a) $\log(x-1)+\log(x-2)=2\log(x-3)$ b) $\log(x-2)+\log(x+2)=2\log(x-1)$

12.124.a) $\log(2x-1)-\log(x+2)=\log(x-2)$ b) $2\log(3x-5)-\log(x+1)=2-\log 25$

12.125.a) $\log(\log x)=0$ b) $\log_3(\log x)=1$ c) $\log_2(\log_3 x)=2$

12.126.a) $\log_4[\log_3(\log_2 x)]=0$ b) $\log_2[\log_3(\log_5 x)]=0$ c) $\log_2\log_2\log_2 x=0$

12.127.a) $\log_{\sqrt{2}}\log_2\log_4(x-15)=0$ b) $\log[\log_2\log_3\sqrt{x}+1]=0$ c) $\log_3[3+2\log_3(1+x)]=0$

12.128.a) $\log_2[4+3\log_3(2x-3)]=1$ b) $\log_3[98-2\log(x-1)]=2$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2^2 x-3\log_2 x+4)=-1$

12.129.a) $\log_{x+2}(3x^2-12)=2$ b) $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}^2 x-3\log_{\frac{1}{2}} x+5\right)=2$

12.130.a) $\frac{2\log x}{\log x-1}-\log x=\frac{2}{\log x-1}$ b) $\frac{1}{5-\log x}+\frac{2}{1+\log x}=1$ c) $\frac{1}{5-4\log x}+\frac{4}{1+\log x}=3$

12.131.a) $\frac{2}{7-\log x}+\frac{9}{11+\log x}=\frac{13}{12}$ b) $\frac{1}{5-4\log(x+1)}+\frac{4}{1+\log(x+1)}=3$

12.132.a) $\log(x^2+2x+1)-2\log(x+1)=\log(x^2+6)-1$ b) $2\log\left(\frac{1}{2}+x\right)-\log\left(\frac{5}{2}+x\right)=\log(x-1)+\log 2$

12.133.a) $\log\sqrt{5x-4}-\log\sqrt{x-1}=2+\log 0{,}08$

b) $\frac{1}{2}\log 2+\log\sqrt{x^2+4x+5}-\frac{1}{2}\log(x^2-4x+5)=\frac{1}{2}$

12.134.a) $\log\sqrt{1-x^2}-3\log\sqrt{1-x}=\log\sqrt{1+x}+2$

b) $\log x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\log 5-1=-\frac{1}{2}\log(x-1)$

12.135.a) $3^{2-\log_3 x}=81x$ b) $x^{\log x}=10$

c) $x^{\log x}=10000$ d) $2^{2\log_3 x}\cdot 5^{\log_3 x}=400$

12.136.a) $3^{\log_5 x^2}\cdot 2^{\log_5 x}=324$ b) $9^{\log_7 x}\cdot 2^{2\log_7 x}=36$

12.137.a) $x^{3-\log\frac{x}{3}}=900$. b) $5^x\cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}}=50$.

c) $3^x\cdot 8^{\frac{x}{x+2}}=6$ d) $\log_3(3^{x-1}+6)=x$

12.138.a) $\log_5(5^{x+1}-20)=x$ b) $\log(2^x+x-4)=x(1-\log 5)$

12.139.*a) $\log(6\cdot 5^x-25\cdot 20^x)=x+\log 25$ b) $\log(x^2-x-6)-x=\log(x+2)-4$

12.140.*a) $\log_3(2^x-1)+\log_3(2^x-3)=1$ b) $\log_2(3^x-1)+\log_2(3^x-2)=1$

12.141.*a) $\log_5(6-5^x)=1-x$ b) $\log_3(4\cdot 3^{x-1}-1)=2x-1$

12.142.*a) $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$ b) $\log_3(3^x-1)\cdot\log_3(3^{x+1}-3)=6$

12.143.a) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$ b) $\log(2^x+x-13)=x-x\log 5$

Primjenjujući formulu $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ za prelazak s jedne logaritamske baze na drugu, riješiti slijedeće jednačine:

12.144.a) $\log_2 x+\log_3 x=1$ b) $\log_2 x+\log_x 2=2$ c) $\log_9 x+\log_{x^2} 3=1$

12.145.a) $\log_3 x+\log_{27}x+4=0$ b) $\log_2 x-\log_{\frac{1}{2}} x-8=0$ c) $\log_4 x-\log_{\frac{1}{4}} x-4=0$

12.146.a) $\log_5 x+\log_x 5=\dfrac{5}{2}$ b) $\log_3 x+\log_9 x=\log\dfrac{3}{2}$ c) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$

12.147.a) $\log_{16} x+\log_8 x+\log_2 x=\dfrac{19}{36}$ b) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\dfrac{11}{12}$

12.148.a) $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27}x=\dfrac{4}{3}$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x\cdot\log_8 x\cdot\log_4 x=4$ c) $\log_{25}x\cdot\log_{\frac{1}{5}} x\cdot\log_5 x=4$

12.149.a) $\log_x 9+3\log_9 x=4$ b) $\log_{4x+1}7+\log_{9x}7=0$ c) $\log_{x+1}3+\log_{2x}\dfrac{1}{3}=0$

12.150.a) $\log_{2x}\dfrac{1}{2}\cdot\log_{\frac{x}{4}}4-\log_x 2=0$ b) $\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}}2-\log_{\frac{x}{64}}=0$ c) $\log_x 3\cdot\log_{\frac{x}{3}}3+\log_{\frac{x}{81}}3=0$

12.151.*a) $\log_{\frac{1}{2}} x\cdot\log_2 x\cdot\log_4 x=4$ b) $\log_{25} x\cdot\log_{\frac{1}{5}} x\cdot\log_5 x=4$

12.152.*a) $\log_{\frac{1}{2}}\log_4\log_5\left(x^2+9\right)=1$ b) $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2$

12.153.* $\log_2 x\cdot\log_3 x\cdot\log_5 x=\log_2 x\cdot\log_3 x+\log_2 x\cdot\log_5 x+\log_3 x\cdot\log_5 x$

12.154.*a) $(x-1)^{\log^2 x-2\log x}=(x-1)^3$ b) $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27}x\cdot\log_{81}x=\dfrac{2}{3}$

12.155.*a) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2-\log_{4x}2\cdot\log_{8x}2=0$ b) $\log_{2x}\dfrac{1}{2}\cdot\log_{\frac{x}{4}}4=\log_x 2$

12.156.*a) $\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}}2=\log_{\frac{x}{64}}2$ b) $\log_{5x}\dfrac{5}{x}+\log_5^2 x=1$

12.157.*a) $\log_{\sqrt{a}}\dfrac{\sqrt{2a-x}}{a}-\log_{\frac{1}{a}}x=0$ b) $\log_a x-\log_{a^2}x+\log_{a^4}x=\dfrac{3}{4}$

12.158.*a) $\log_{a^2-x^2}\left|(ax)^2-1\right|=1$ b) $\log_3 a-\log_x a=\log_{\frac{x}{3}}a$

Riješiti date jednačine:

12.159.a) $x^{\log x}=100x$ b) $x^{2\log x}-10x=0$ c) $x^{\frac{1}{4}(\log x+7)}=10^{\log x+1}$

12.160.a) $x^{1-\log x}=0{,}01$ b) $0{,}1\cdot x^{\log x-2}=100$ c) $x^{1+\log x}=10^2$

12.161.a) $x^{\frac{\log x+7}{4}}=10^{\log x+1}$ b) $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}}=10$ c) $x^{2\log^3 x-\frac{3}{2}\log x}=\sqrt{10}$

12.162.a) $x^x=x$ b) $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$ c) $\sqrt[3]{x^x}=x^{\sqrt[3]{x}}$

12.163.a) $4^{\log_3 x}-5\cdot2^{\log_3 x}+2^{\log_3 9}=0$ b) $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}=12$

12.164.a) $\log_2\left(2^x-7\right)=3-x$ b) $\log_2\left(4^x+4\right)=x+\log_2\left(2^{x+1}-3\right)$

12.5. Logaritamske nejednačine (nejednadžbe)

Riješiti logaritamske nejednačine (nejednadžbe):

12.165.a) $\log_2 x>4$ b) $\log_2 x<8$ c) $\log_2 x>32$ d) $\log_5 x<5$

12.166.a) $\log_3 x<3$ b) $\log_3 x<81$ c) $\log_3 x<\dfrac{1}{9}$ d) $\log_{16}x>16$

12.167.a) $\log x>0$ b) $\log x<0$ c) $\log_2 x<0$ d) $\log_7 x>0$

12.168.a) $\log_{\frac{1}{2}}x<0$ b) $\log_{\frac{1}{10}}x>0$ c) $\log_{\frac{1}{4}}x>0$ d) $\log_{\frac{3}{4}}x<0$

12.169.a) $\log_4(x-1)<2$ b) $\log_3(2x+5)>1$ c) $\log_5(1-3x)<3$

12.170.a) $\log(x-1)<2$ b) $\log(2x+5)>1$ c) $\log(1-3x)<3$

12.171.a) $\log_4(x-1)<\log_4 2$ b) $\log_7(2x+5)>\log_7(x-3)$

12.172.a) $\log_{0.2}(4-2x)>-1$ b) $\log_{0.5}(3x-2)<-1$

12.173.a) $\log_{0.4}(2x-5)>\log_{0.4}(x+1)$ b) $\log_3 x+\log_3(x-8)>2$

12.174.a) $\log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-3x+5\right)<\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x+1\right)$ b) $\log_{\frac{1}{4}}\left(2x^2+5x+1\right)<0$

12.175.a) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x-1\right)<0$ b) $\log_8\left(x^2-4x+3\right)<1$

12.176.a) $\dfrac{x-3}{\log_2 x}>0$ b) $\dfrac{\log_5 x}{2x+1}<0$ c) $\dfrac{x^2-5x+6}{\log x}>0$

12.177.a) $\dfrac{x+16}{\log_{\frac{2}{7}}x}<0$ b) $\dfrac{\log_{0.05}x}{x^2+25}>0$ c) $\dfrac{\log_{0,04}x}{\log x}>0$

12.178.a) $\log_6\dfrac{x-2}{1-x}<0$ b) $\log_9\dfrac{4-x}{2+x}>0$ c) $\log_{11}\dfrac{x^2-2x+1}{x-7}<0$

12.179.a) $\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{3x-1}{1-x}<0$ b) $\log_{0,5}\dfrac{6+x}{1+x}>0$ c) $\log_{0,01}\dfrac{x^2-1}{x^2-9}<0$

12.180.a) $\log_2\dfrac{x^2+3}{x+3}>1$ b) $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-4}{x+10}<-1$ c) $\log_4\dfrac{2x-1}{x+1}<-\dfrac{1}{2}$

12.181.a) $\log_2 x-\dfrac{2}{\log_2 x-1}\le 0$ b) $\dfrac{1}{\log x}+\dfrac{1}{1-\log x}>11$

12.182.a) $\dfrac{1}{\log_5(3-2x)}-\dfrac{1}{4-\log_5(3-2x)}<0$ b) $\dfrac{\log_2 x}{\log_2 x-2}<\dfrac{2}{\log_2 x+6}$

12.183.a) $\log_2 x \le \dfrac{2}{\log_2 x-1}$ b) $\dfrac{1}{1-\log_{\frac{1}{2}} x}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x}\ge 1$

12.184.a) $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_4 x}\le\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{\log_3(x+1)}<\dfrac{1}{2\log_9\sqrt{x^2+6x+9}}$ c) $\dfrac{2\log x+110}{\log x+10}\ge 1$.

12.185.a) $\log_3(x+2)+\log_3(x-4)-1\le 0$ b) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\ge 1$

12.186.a) $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-4x+6}{x}<0$ b) $\log_x\dfrac{3}{8-2x}>-2$

12.187.*a) $\log_3\log_{\frac{9}{16}}\left(x^2-4x+3\right)\le 0$ b) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\log_{0,3}\log_3\frac{x-3}{x-4}}\le 1$.

12.188.*a) $\log_{0.7}\left(1+x-\sqrt{x^2-4}\right)\le 0$ b) $\log_2\log_3\dfrac{x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+1}{x-1}$

12.189.*a) $\log_3 x\cdot\log_x 9\cdot\log_{3x} 9<2$ b) $\log_x 2\cdot\log_{2x} 2\cdot\log_2 16x<1$

12.190.*a) $\log_x\log_2\left(4^x-3\right)\le 1$ b) $\log_2\left(2^x-2\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-4\right)>-2$

12.192.*a) $2\log_5\sqrt{x}-2\ge\log_x\dfrac{1}{5}$ b) $\log_{\frac{1}{3}} x+\dfrac{5}{2}>\log_x 3$

12.193.*a) $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}\ge 2$ b) $\log_x\log_2\left(4^x-6\right)\le 1$ c) $\log_{x+3} 16>2$

Odrediti definiciono područje (domenu) date funkcije:

12.194.a) $y=\log(2x-3)$ b) $y=\dfrac{\log(x-2)}{x-3}$ c) $y=\dfrac{4x-11}{\log(x+5)}$

12.195.a) $y=\sqrt{\log x}$ b) $y=\sqrt{\log(x-10)}$ c) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}(1-x)}$

12.196.a) $y=\dfrac{\log x}{x+1}+\log(3-x)$ b) $y=\dfrac{\log(-x^2+3x+4)}{x(x^2-4)}$

12.197.*a) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{7}}\dfrac{x-1}{x+5}}$ b) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2-1}$

12.198.*a) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\log_3\dfrac{x+1}{x-1}}$ b) $y=\sqrt{\log_x\dfrac{x+3}{x-1}-1}$

13. OSNOVI TRIGONOMETRIJE

13.1. Orijentisani ugao (kut). Radijan.

$180° = \pi$ radijana
$1° = \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}01745329$ radijana
1 radijan $\approx 57{,}295779° \approx 57°\,17'\,44{,}8''$

Uglove date u stepenima (stupnjevima) izraziti u radijanima:

13.1.a) 90° b) 180° c) 270° d) 360°

13.2.a) 30° b) 60° c) 45° d) 15°

Uglove date u stepenima izraziti u radijanima:

13.3.a) 120° b) 135°c) 240° d) 300°

13.4.a) 40° b) 100° c) 68° d) 56°

Koliko stepeni (stupnjeva) ima ugao (kut) čija mjera je izražena u radijanima:

13.5.a) π b) 2π c) 4π d) -2π

13.6.a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) $\dfrac{\pi}{3}$ c) $\dfrac{\pi}{4}$ d) $\dfrac{\pi}{6}$

13.7.a) $\dfrac{2\pi}{3}$ b) $\dfrac{5\pi}{6}$ c) $\dfrac{5\pi}{3}$ d) $\dfrac{5\pi}{2}$

13.8.a) $\dfrac{7\pi}{6}$ b) $\dfrac{3\pi}{4}$ c) $\dfrac{11\pi}{6}$ d) $\dfrac{5\pi}{4}$

13.9.a) 1 b) 3 c) 5 d) 11

13.10.a) -4 b) -2 c) -18 d) -253

13.11. Koliko stepeni ima ugao od $\dfrac{3\pi}{5}$ radijana?

13.2. Trigonometrijska kružnica i predstavljanje uglova (kutova) u kružnici

U trigonometrijsku kružnicu ucrtaj uglove:

13.12.a) $90°$ b) $180°$ c) $270°$ d) $360°$

13.13.a) $30°$ b) $120°$ c) $210°$ d) $300°$

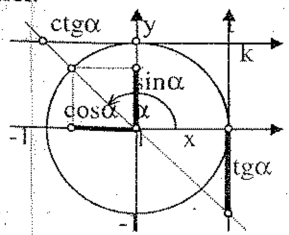
13.14.a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{11\pi}{6}$

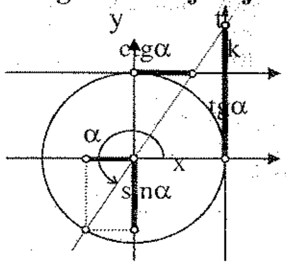
13.15.a) $-150°$ b) $-300°$ c) $-450°$ d) $-540°$

13.16.a) $-\frac{5\pi}{6}$ b) $-\frac{4\pi}{3}$ c) $-\frac{5\pi}{4}$ d) $-\frac{13\pi}{6}$

13.17. Pronađi tačku na trigonometrijskoj kružnici koja odgovara datom broju: a) 2 b) 6 c) -3 d) 4

13.3. Definicije trigonometrijskih funkcija na trigonometrijskoj kružnici.





13.18. Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici dati ugao i odredi grafičke vrijednosti njegovog sinusa:

13.18.a) $30°$ b) $120°$ c) $210°$ d) $300°$

13.19.a) 2π b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{3\pi}{4}$

Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici dati ugao i odredi grafičke vrijednosti njegovog kosinusa:

13.20.a) $90°$ b) $120°$ c) $180°$ d) $210°$

13.21.a) $-\pi$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{5\pi}{4}$ d) $\frac{11\pi}{6}$.

Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici dati ugao i odredi grafičke vrijednosti njegovog tangensa:

13.22.a) $45°$ b) $120°$ c) $135°$ d) $225°$

13.23.a) 2π b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{4}$ d) $-\frac{3\pi}{4}$

Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici dati ugao i odredi grafičke vrijednosti njegovog kotangensa:

13.24.a) $45°$ b) $120°$ c) $270°$ d) $315°$

13.25.a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{5\pi}{4}$ d) $-\frac{4\pi}{3}$

13.26. Konstruiši oštar ugao α ako je:

a) $\sin\alpha=0{,}7$ b) $\cos\alpha=\frac{1}{4}$ c) $\sin\alpha=\frac{2}{5}$ d) $tg\alpha=2$ e) $ctg\alpha=5$

Grafički odrediti vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ako je:

13.27.a) $\cos\alpha=0{,}5$ b) $\sin\alpha=-0{,}5$ c) $\cos\alpha=-1$ d) $\sin\alpha=1$

13.28.a) $tg\alpha=3$ b) $tg\alpha=-2$ c) $ctg\alpha=2$ d) $ctg\alpha=-1$

13.29. U kojem kvadrantu se nalazi drugi krak ugla α ako je:
a) $\alpha=200^0$ b) $\alpha=350^0$ c) $\alpha=645^0$ d) $\alpha=1275^0$ e) $\alpha=-855°$?

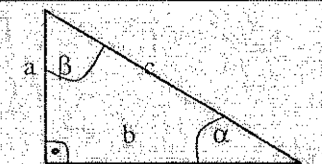
Izračunati vrijednost izraza:

13.30.a) $3\sin90°-78\cos90°+55tg180°$ b) $6\cos0°-4\sin90°+45tg360°$

13.31.a) $35\sin180°+9\cos0° - 55tg360°$
b) $11\cos180°-12\sin270°+5ctg270°$

13.32.a) $2\sin\pi + 5\cos\pi + 3tg2\pi$ b) $3\cos5\pi - \sin3\pi+24ctg\pi/2$

13.4. Definicije trigonometrijskih funkcija oštrog ugla u pravouglom trouglu (trokutu).



$$\sin\alpha=\frac{a}{c},\ \sin\beta=\frac{b}{c},\ \cos\alpha=\frac{b}{c},\ \cos\beta=\frac{a}{c}$$

$$tg\alpha=\frac{a}{b},\ tg\beta=\frac{b}{a},\ ctg\alpha=\frac{b}{a},\ ctg\beta=\frac{a}{b}$$

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija nekih uglova (kutova) koje se često koriste u raznim zadacima:

α f(α)	30° π/6	45° π/4	60° π/3	90° π/2	120° 2π/3	150° 5π/6	180° π	270° 3π/2	360° 2π
sinα	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	n.d.	0
ctgα	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	n.d.	0	n.d.

13.33. Katete pravouglog trougla su a=6 i b=8. Odredi vrijednosti trigonometrijskih funkcija oštrih uglova ovog trougla.

13.14. Izračunati vrijednosti svih trigonometrijskih funkcija oštrih uglova pravouglog trougla kod koga je:
a) a=4, c=5 b) b=9, c=15 c) a=10, b=24 d) a=20, b=21.

13.35. Konstruiši oštar ugao α ako je:
a) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ b) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ c) $tg\alpha=\frac{3}{7}$ d) $ctg\alpha=\frac{11}{6}$.

Izračunati vrijednost datog izraza:

13.36.a) sin30°+cos60° b) cos60°-sin60°
c) sin45°-tg45° d) ctg30°+sin30°

13.37.a) sin30°-cos60°-tg45°-ctg60° b) 2sin60°+7ctg45°-6tg45°.

13.38. sin30°cos60°+cos30°sin60°+2cos45°sin45°-tg45°.

13.39.a) $2\sin\frac{\pi}{6}+4\cos\frac{\pi}{3}-tg\frac{\pi}{4}$ b) $4\cos\frac{\pi}{4}-2\sin\frac{\pi}{2}+tg\frac{\pi}{4}$.

13.40.a) $4\sin\frac{\pi}{3}ctg\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}tg\frac{\pi}{6}$ b) $8\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}tg\frac{\pi}{4}+ctg^3\frac{\pi}{6}$.

13.41.a) $\frac{2\sin 30^0+3}{10\sin 30^0-1}$ b) $\frac{2\cos 45^0-\sin 45^0}{1+\sin^2 45^0}$ c) $\frac{1+2tg^2 60^0}{1-2tg^2 60^0}+2$.

13.42.a) $\frac{\sin^2 30^0+2\sin^2 45^0}{3\cos^2 30^0-\cos^2 45^0}$ b) $\frac{5tg^2 30^0+ctg^2 45^0}{\sin^2 60^0-2\cos^2 45^0}$. c) $\frac{6\sin^2 45^0-8ctg^2 60^0}{tg^2 60^0}$

Odrediti vrijednosti trigonometrijskih funkcija datih uglova (koristiti kalkulatore):

13.43.a) 44^0 b) 53^0 c) 27^0 d) $42{,}34^0$ e) 1457^0
13.44.a) 42 b) 15 c) 32 d) -12 e) -676,47

Odrediti ugao x u stepenima, minutama i sekundama ako je dato:

13.45.a) sinx=0,74327 b) cosx=0,95641 c) tgx=0,23458 d) ctgx=5
13.46.a) sinx=0,947 b) cosx=0,124 c) tgx=12,58 d) ctgx=-12,5

Odrediti ugao x u radijanima ako je dato:

13.47.a) sinx=0,53827 b) cosx=-0,53748 c) tgx= 3,143 d) ctgx=0,567
13.48.a) sinx=-0,88 b) cosx=0,48 c) tgx=-3,143 d) ctgx=11.

13.5. Osnovni trigonometrijski identiteti

Zadana funkcija	TRAŽENA TRIGONOMETRIJSKA FUNKCIJA			
	sinα	cosα	tgα	ctgα
sinα	sinα	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
cosα	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	cosα	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
tgα	$\frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	tgα	$\frac{1}{tg\alpha}$
ctgα	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$\frac{ctg\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$\frac{1}{ctg\alpha}$	ctgα

cos(90°-α)=sinα $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

sin(90°-α)=cosα $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$; $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$

tg(90°-α)=ctgα ili $tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=ctg\alpha$; $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha\neq k\pi$, $k\in Z$

ctg(90°-α)=tgα $ctg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=tg\alpha$; $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$, $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

13.49. Ako je $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, α u četvrtom kvadrantu, odrediti cosα.

13.50. Ako je $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, α u četvrtom kvadrantu, odrediti sinα.

13.51. Ako je $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, α u drugom kvadrantu, odrediti cosα i tgα .

13.52. Ako je $\cos\alpha=-\frac{7}{11}$, α u drugom kvadrantu, odrediti sinα,ctgα i tgα.

13.53. Ako je tgα = 3, α u prvom kvadrantu, odrediti vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ugla α

13.54. Ako je ctgα=2, α u prvom kvadrantu, odrediti vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ugla α.

13.55. Odrediti vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija pozitivnog oštrog ugla α ako je dato:

a) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ b) $\cos\alpha=\frac{40}{41}$ c) $ctg\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$ d) $tg\alpha=\frac{4}{3}$

13.56. Odrediti vrijednost izraza $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$, ako je $tg\alpha = -2$.

13.57. Ako je $ctg\alpha = 3$, odrediti vrijednost izraza $\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}$.

13.58. Odrediti vrijednost izraza $tg\alpha - tg\alpha\sin^2\alpha$, ako je $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ i $-\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

13.59. Odrediti vrijednost izraza $tg^2\alpha+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}+ctg^2\alpha$, ako je $tg\alpha + ctg\alpha = 3$.

13.60. Ako je $tg\alpha + ctg\alpha = 5$, odrediti :
a) $tg^2\alpha + ctg^2\alpha$ b) $tg^3\alpha + ctg^3\alpha$.

13.61. Ako je $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{4}{3}$, izračunati $\sin\alpha\cos\alpha$.

13.62. Ako je $tg\alpha = \frac{2}{3}$, odrediti $\frac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{3\cos\alpha-4\sin\alpha}$.

Uprostiti dati izraz:

13.63. a) $1-\cos^2 x$ b) $tgx\cos x$ c) $\sin^2 x-1$ d) $2-2\sin^2 x$

13.64. a) $3\cos^2 x-3$ b) $1-\cos^2 x+\sin^2 x$ c) $ctgx\sin x-\cos x$ d) $3-\sin^2 x-\cos^2 x$

13.65. a) $1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ b) $\sin\alpha ctg\alpha+\cos\alpha$ c) $(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)$

13.66. a) $\sin^2 x-\cos^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x$ b) $\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$
c) $1 - \cos^2 x + tg^2 x\cos^2 x$ d) $5-\sin^2 55°-\cos^2 55°$

13.67. a) $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha-1}$ b) $\frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}$ c) $\frac{tg\alpha}{tg^2\alpha}\cdot\frac{ctg^2\alpha-1}{ctg\alpha}$ d) $\frac{2\sin^2\alpha-1}{1-2\cos^2\alpha}$

13.68. a) $\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x-\cos x}$ b) $\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{ctg^2 x}$

c) $\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(1-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$ d) $\frac{\sin x\, ctgx}{\cos^2 x}-tgx\sin x$

13.69. a) $\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}:\left[1+\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)^2\right]$ b) $\frac{\cos x}{1-\sin x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}$

c) $ctgx+\frac{\sin x}{1+\cos x}$ d) $tgx+\frac{\cos x}{1+\sin x}$

13.70.* a) $\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ b) $\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}+\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

c) $\left(\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}+\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$

13.71.* Ako je $\sin x=\frac{\sqrt{1+m}-\sqrt{1-m}}{2}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$, $0<m\le 1$, odrediti $\cos x$ i dokazati da je $\sin x\cos x = \frac{m}{2}$.

13.72.* a) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\frac{2}{tg\alpha+ctg\alpha}-1$ b) $\sqrt{\frac{2}{1+\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{2}{1-\sin\alpha}}$

Dokazati slijedeće identitete:

13.73. a) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ b) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1$

13.74. a) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$ b) $(1+tg^2\alpha)\cos^2\alpha=1$

13.75. a) $(1-\cos^2\alpha)(1+tg^2\alpha)=tg^2\alpha$ b) $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha ctg^2\alpha=ctg^2\alpha$

13.76. a) $\frac{\cos^2 x-1}{\sin^2 x-1}=tg^2 x$ b) $\frac{5\cos x-4}{3-5\sin x}-\frac{3+5\sin x}{4+5\cos x}=0$

c) $\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{tg^2 x}=1$ d) $\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{1+\sin x}$

13.77. a) $\frac{1-2\sin^2 x}{2\cos^2 x-1}=1$ b) $\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{1+\sin x\cos x}=\sin x-\cos x$

13.78. a) $\frac{\sin x}{1+ctgx}+\frac{\cos x}{1+tgx}=\frac{1}{\sin x+\cos x}$ b) $\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{tg^2 x-1}{tgx}$

c) $\frac{\sin x+tgx}{tgx}=1+\cos x$ d) $1+\frac{tg^2 x-1}{tg^2 x+1}=2\sin^2 x$

13.79. a) $\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2-1}{tg\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=2ctg^2\frac{x}{2}$ b) $\left(\frac{1}{\cos x}-\cos x\right)\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\right)=\sin x\cos x$

13.80. $\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{tg^2 x+1}{tg^2 x-1}$

13.81. $tg^2\alpha-\sin^2\alpha=tg^2\alpha\sin^2\alpha$

13.82. Ako je $\sin x+\cos x=m$, odrediti $\sin^3 x + \cos^3 x$.

13.83. Ako je $\sin x-\cos x=m$, odrediti:
a) $\sin^3 x - \cos^3 x$ b) $\sin^4 x + \cos^4 x$

Dokazati:

13.84.* $3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=1$

13.85.* $\sin^3\alpha(1+ctg\alpha)+\cos^3\alpha(1+tg\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$.

13.86.* $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7}$

13.6. Periodičnost trigonometrijskih funkcija

$\sin(x+k\cdot360°)=\sin x$	ili	$\sin(x+2k\pi)=\sin x$,	$k\in Z$.
$\cos(x+k\cdot360°)=\cos x$	ili	$\cos(x+2k\pi)=\cos x$,	$k\in Z$.
$tg(x+k\cdot180°)=tgx$	ili	$tg(x+k\pi)=tgx$,	$k\in Z$.
$ctg(x+k\cdot180°)=ctgx$	ili	$ctg(x+k\pi)=ctgx$,	$k\in Z$.

Odrediti osnovni period date funkcije:

13.87.a) $y=7\sin x$ b) $y=-11\cos x$ c) $y=\sin x+\cos x$ d) $y=\cos x-\sin x$

13.88.a) $y=4+5\sin x$ b) $y=12-\cos x$ c) $y=2\sin x-5\cos x$ d) $y=4\sin x+tgx$

13.89.a) $y=\sin 4x$ b) $y=\sin(x-\pi)$ c) $y=\cos(2x-\pi)$ d) $y=5tg2x$

13.90.a) $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ b) $y=tg\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$ c) $y=tg\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$

13.91. Provjeri da li je $\frac{\pi}{3}$ period funkcije $y=9\sin 3x$.

Izračunati vrijednost datog izraza:

13.92.a) $\sin 390°$ b) $tg765°$ c) $\cos 405°$ d) $ctg750°$

13.93.a) $\cos 420°-2\sin 750°$ b) $\sin 810°+15\cos 1170°$ c) $tg585°+ctg225°$

13.94.a) $7\sin 630°+3\cos 990°-ctg765°$ b) $6\cos 1500°-\sin 540°+tg900°$

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija datog izrazi pomoću trigonometrijske funkcije oštrog ugla

13.95.a) $\sin 1130°$ b) $\cos 800°$ c) $tg1510°$ d) $ctg2405°$

13.96.a) $\sin\frac{7\pi}{3}$ b) $\cos\frac{19\pi}{3}$ c) $tg\frac{25\pi}{6}$ d) $ctg\frac{199\pi}{7}$

13.97. Izračunati vrijednost izraza:

a) $2\sin\frac{13\pi}{6}+4\cos\frac{17\pi}{6}$ b) $\cos\frac{8\pi}{3}-2tg\frac{10\pi}{3}$

c) $tg12\pi+\sin 28\pi-\cos 17\pi+ctg\frac{9\pi}{2}$

13.98.* Odrediti period funkcija:

a) $y=|5\sin 2x|+3$ b) $y=|11\cos(3x-4)+19|$ c) $y=|8tg(x-2)-6|$

13.99.* Ispitati da li je periodična slijedeća funkcija:

a) $y=\sin\sqrt{2}x+\cos\sqrt{3}x$ b) $y=\cos\sqrt{3}x-tg\sqrt{5}x$

13.100.* Ako za svaku vrijednost argumenta x vrijedi jednakost

$$f(c+c)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)},$$ dokazati da je funkcija f(x) periodična.

13.7. Trigonometrijske funkcije negativnog argumenta. Parne i neparne trigonometrijske funkcije

$\sin(-x)=-\sin x$	funkcija je neparna
$\cos(-x)=\cos x$	funkcija je parna
$tg(-x)=-tgx$	funkcija je neparna
$ctg(-x)=-ctgx$	funkcija je neparna

Ispitati parnost slijedećih trigonometrijskih funkcija:

13.101.a) $y=2\sin x$ b) $y=-3\sin x$ c) $y=4\cos 2x$ d) $y=-8\cos x$

13.102.a) $y=\sin x+11$ b) $y=tgx+5$ c) $y=ctgx-4$ d) $y=\sin x+2\cos x$

13.103.a) $f(x)=3-xctgx$ b) $f(x)=4+x\cos x$

c) $f(x)=ctg10x+44$ d) $f(x)=12-5\sin 2x$

Koja od slijedećih funkcija je parna, koja je neparna, a koja nije ni parna ni neparna:

13.104.a) $f(x)=\frac{x^3-\sin 3x}{x-\sin 3x}$ b) $f(x)=\frac{\cos 4x}{x^4-\cos 2x}$ c) $f(x)=\frac{\sin^2 x+\sin x^2}{\cos 2x}$

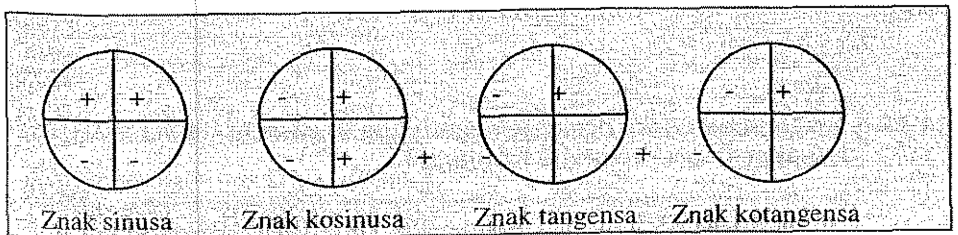
13.105.a) $f(x)=x^3-tg^3 3x\sin^3 2x$ b) $f(x)=5tg^5 5x|tg5x|$ c) $f(x)=8tg^8 8x|tg8x|$

13.106.* Ispitati parnost slijedećih funkcija:

a) $f(x)=\sin(\pi x^4+1)+\cos^5\frac{\pi x^2}{x^2-1}-|x^4-3|$

b) $f(x)=\sin(\pi x^4-1)-2\sin x$

13.8. Znaci trigonometrijskih funkcija



13.107. U kojem kvadrantu se nalazi drugi krak ugla α ako je $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha<0$?
13.108. U kojem kvadrantu se nalazi drugi krak ugla α ako je $\cos\alpha>0$, $tg\alpha<0$?
13.109. U kojem kvadrantu se nalazi drugi krak ugla α ako je $tg\alpha<0$, $\sin\alpha>0$?

13.110. Odrediti znak datog broja:
a) $\sin 125^0$ b) $\sin 320^0$ c) $\cos 116^0$ d) $\cos 250^0$

13.111. Odredi znak svakog od datih brojeva:
a) $tg265^0+5$ b) $ctg573^0$ c) $\cos(-226^0)$ d) $\sin(-270^0)$

13.112. Odredi znak proizvoda:
a) $\sin 72^0 \cos 100^0$ b) $tg200^0 \sin 350^0$ c) $\cos(-95^0)ctg(-100^0)$

13.113. Odredi znak razlike:
a) $\sin 77^0 - \sin 25^0$ b) $\cos 67^0 - \cos 80^0$
c) $tg73^0 - tg54^0$ d) $ctg12^0 - ctg86^0$

13.114. U kojim intervalima je data funkcija pozitivna, a u kojima je negativna:
a) $y=\sin x \cos x$ b) $y=\sin x\, tgx$ c) $y=tgx+ctgx$ d) $y=1-\sin x$

13.115. U kojim intervalima vrijedi nejednakost:
a) $\sin x<0$ b) $\cos 2x>0$ c) $\sin 2x>0$ d) $\sin(-2x)>0$

13.116.* Naći sva rješenja nejednačine:
a) $tg2x<0$ b) $\sin 2x>0$ c) $\cos 2x<0$ d) $ctg2x<0$

13.117.* Odrediti oblast definisanosti (domenu) funkcije:
a) $f(x)=\sqrt{\sin x}$ b) $f(x)=\sqrt{-tgx}$ c) $f(x)=\sqrt{3\cos x}$

13.9. Svođenje na prvi kvadrant

ARGUMENT FUNKCIJE φ	TRIGONOMETRIJSKA FUNKCIJA ARGUMENTA φ			
	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$tg\varphi$	$ctg\varphi$
$0-x$	-sinx	cosx	-tgx	-ctgx
$\frac{\pi}{2}-x$ ili $90°-x$	cosx	sinx	ctgx	tgx
$\frac{\pi}{2}+x$ ili $90°+x$	cosx	-sinx	-ctgx	-tgx
$\pi-x$ ili $180°-x$	sinx	-cosx	-tgx	-ctgx
$\pi+x$ ili $180°+x$	-sinx	-cosx	tgx	ctgx
$\frac{3\pi}{2}-x$ ili $270°-x$	-cosx	-sinx	ctgx	tgx
$\frac{3\pi}{2}+x$ ili $270°+x$	-cosx	sinx	-ctgx	-tgx
$2\pi-x$ ili $360°-x$	-sinx	cosx	-tgx	-ctgx
$2\pi+x$ ili $360°+x$	sinx	cosx	tgx	ctgx
$2k\pi+x$ ili $k\cdot 360°+x$; $k\in Z$	sinx	cosx	tgx	ctgx

Datu vrijednost funkcije zamijeniti vrijednošću funkcije komplementnog ugla:
13.118.a) $\sin 23°$ b) $\sin 66°$ c) $tg43°$ d) $tg14°$
13.119.a) $\cos 17°$ b) $\cos 51°$ c) $ctg24°$ d) $ctg72°$

Izračunati po formulama svođenja na prvi kvadrant:
13.120.a) $\sin 120°$ b) $\cos 150°$ c) $\sin 135°$ d) $\cos 120°$
13.121.a) $tg120°$ b) $ctg135°$ c) $tg135°$ d) $ctg150°$
13.122.a) $\cos 210°$ b) $\sin 240°$ c) $ctg225°$ d) $\sin 210°$
13.123.a) $\sin 225°$ b) $\cos 225°$ c) $tg240°$ d) $ctg240°$
13.124.a) $\sin 315°$ b) $\cos 300°$ c) $tg300°$ d) $ctg330°$

Odrediti vrijednosti trigonometrijskih funkcija:
13.125.a) $\sin 480°$ b) $\sin 855°$ c) $\sin 1230°$ d) $\sin 960°$
13.126.a) $\sin 1290°$ b) $\cos 570°$ c) $\cos 1230°$ d) $tg960°$
13.127.a) $\cos 480°$ b) $ctg855°$ c) $tg1230°$ d) $\cos 945°$

Vrijednosti datih trigonometrijskih funkcija zamijeniti sa vrijednostima trigonometrijskih funkcija uglova koji su manji od 45°:
13.128.a) $\sin 55°$ b) $\sin 114°$ c) $\sin 160°$ d) $\sin 325°$
13.129.a) $\cos 87°$ b) $\cos 215°$ c) $\cos 111°$ d) $\cos 400°$

13.130.a) $tg187°$ b) $tg280°$ c) $ctg451°$ d) $ctg600°$

13.131. Vrijednosti datih trigonometrijskih funkcija zamijeniti sa vrijednostima trigonometrijskih najmanjih pozitivnih uglova:
a) $\sin 11\pi$ b) $\cos 23\pi$ c) $\sin 8\pi$ d) $tg 33,1\pi$

Izračunati vrijednost izraza:

13.132.a) $\cos 660°$ b) $\sin 870°$ c) $ctg930°$ d) $tg585°$

13.133.a) $4\sin 810° + 3\cos 720° - 3\sin 630° + 5\cos 900°$
b) $5tg540° + 2\cos 1170° + 4\sin 900° - 3\cos 540°$

13.134.a) $\sin\frac{25\pi}{6} - 3tg\frac{13\pi}{4} + 2\cos\frac{19\pi}{3}$
b) $100ctg^2 990^0 + 25tg^2 540^0 - 3\cos^2 990^0$

13.135. Dokazati istinitost datih jednakosti:
a) $\sin\frac{49}{18}\pi = \cos\frac{2\pi}{9}$ b) $\cos\frac{35\pi}{13} = -\sin\frac{5\pi}{26}$ c) $tg\left(-\frac{29}{7}\pi\right) = -tg\frac{\pi}{7}$

13.136.* Uprostiti izraz :
a) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\alpha - 3\pi)ctg\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$
b) $\sin(\alpha - 17\pi)\cos(\pi+\alpha)tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

13.137.* Dokazati istinitost jednakosti:
$$\sin 825^0\cos(-15^0) + \cos 75^0\sin(-555^0) + tg155^0 tg245^0 = 0.$$

13.138.* Dokazati jednakost:
$$\frac{\cos^2 696^0 + tg(-260^0)tg530^0 - \cos^2 156^0}{tg^2 252^0 + ctg^2 342^0} = \frac{1}{2}tg^2 18^0.$$

13.139.* Dokazati tačnost jednakosti:
$$\frac{\sin(-328^0)\sin 958^0}{ctg572^0} - \frac{\cos(-508^0)\cos(-1022^0)}{tg(-212^0)} = -1.$$

13.140.* Dokazati jednakost:
$$\sin 395^0\sin 145^0 - \cos(-505^0)\cos 755^0 - tg(-616^0)tg194^0 = 2.$$

13.10. Adicione teoreme (formule)

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
3. $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$, $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$
$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ (k, n \in Z),\ tg\alpha\, tg\beta \neq \pm 1.$
4. $ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha\, ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}$, $ctg(\alpha-\beta) = \frac{ctg\alpha\, ctg\beta + 1}{ctg\alpha - ctg\beta}$
$\alpha \neq k\pi, \beta \neq n\pi,\ (k, n \in Z), ctg\alpha \neq \pm ctg\beta.$

Izračunati:

13.141.a) $\sin 28°\cos 2° + \cos 28°\sin 2°$ b) $\sin 33°\cos 27° + \cos 33°\sin 27°$

13.142.a) $\sin 35°\cos 10° + \cos 35°\sin 10°$ b) $\sin 85°\cos 15° - \cos 85°\sin 15°$

13.143.a) $\cos 53°\cos 37° - \sin 53°\sin 37°$ b) $\cos 28°\cos 32° - \sin 28°\sin 32°$

13.144.a) $\cos 41°\cos 11° + \sin 41°\sin 11°$ b) $\cos 78°\cos 33° + \sin 78°\sin 33°$

13.145.a) $\frac{tg24^0 + tg21^0}{1 - tg24^0 tg21^0}$ b) $\frac{tg34^0 + tg26^0}{1 - tg34^0 tg26^0}$ c) $\frac{tg124^0 + tg56^0}{1 - tg124^0 tg56^0}$

13.146.a) $\frac{tg73^0 - tg28^0}{1 + tg73^0 tg28^0}$ b) $\frac{tg34^0 - tg4^0}{1 + tg34^0 tg4^0}$ c) $\frac{tg100^0 - tg40^0}{1 + tg100^0 tg40^0}$

13.147. Ako je $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{8}{17}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, odrediti :
a) $\sin(\alpha+\beta)$ b) $\sin(\alpha-\beta)$ c) $\cos(\alpha-\beta)$

13.148. Odrediti $tg(\alpha+\beta)$ i $tg(\alpha-\beta)$, ako je $ctg\alpha = \frac{1}{4}$, $ctg\beta = \frac{5}{6}$.

13.149. Odrediti $tg(\alpha+\beta)$ i $tg(\alpha-\beta)$, ako je $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -\frac{12}{13}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \frac{5}{13}$,
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi,\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$

13.150. Odrediti $\sin(30^0 - \alpha)$, ako je $tg\alpha = \frac{3}{4}$ i $180^0 < \alpha < 270^0$.

13.151. Odrediti $\cos(30^0 - \alpha)$, ako je $ctg\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ i $180^0 < \alpha < 270^0$.

13.152. Odrediti $tg(45^0 + \alpha)$, ako je $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ i $270^0 < \alpha < 360^0$.

13.153. Ako je $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$ i $270^0 < \alpha < 360^0$, odrediti sin(60°+α) i cos(60°-α).

13.154. Bez upotrebe kalkulkatora i tablica izračunati:

a) cos75° b) cos105° c) tg(-75°) d) ctg15°

13.155. Dokazati da je α+β=45°, ako je tgα=$\frac{1}{2}$, tgβ=$\frac{1}{3}$, α i β su oštri pozitivni uglovi.

13.156. Dokazati da je α-β=30°, ako je sinα=$\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$, sinβ=$\frac{3}{5}$, α i β su oštri pozitivni uglovi.

13.157. Dokazati da je α-β=30°, ako je tgα=$\frac{a\sqrt{3}}{4-a}$, tgβ=$\frac{a-1}{\sqrt{3}}$, 1<a<4, α i β su oštri pozitivni uglovi.

13.158. Neka je tgα=x, tgβ=$\frac{1-x}{1+x}$, x>-1, α i β oštri pozitivni uglovi. Dokazati da je $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$. Koliko je α+β ako je x<-1?

13.159. Izraziti

a) sin(α+β+γ) b) cos(α+β+γ) c) tg(α+β+γ)

pomoću trigonometrijskih funkcija od α, β i γ.

13.160. Ako je $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{3\sqrt{11}}$ i $\sin\gamma = \frac{3}{\sqrt{11}}$, dokazati da je

α+β+ γ = $\frac{\pi}{2}$.

Izračunati vrijednosti datih izraza:

13.161.a) $\dfrac{\sin 20^0\cos 25^0+\cos 20^0\sin 25^0}{\cos 35^0\cos 10^0-\sin 35^0\sin 10^0}$ b) $\dfrac{\sin 34^0\cos 236^0-\sin 56^0\cos 124^0}{\cos 28^0\cos 88^0+\cos 178^0\sin 208^0}$

13.162. $\dfrac{tg(39^0+\alpha)+tg(6^0-\alpha)}{1-tg(39^0+\alpha)tg(6^0-\alpha)}+\dfrac{1+ctg(38^0-\beta)tg(7^0+\beta)}{tg(52^0+\beta)-ctg(83^0-\beta)}$.

13.163. $\dfrac{\left(ctg\frac{4\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{7\pi}{18}\right)\left(1+tg\frac{5\pi}{12}tg\frac{\pi}{12}\right)}{tg\frac{5\pi}{12}-tg\frac{\pi}{12}}$

13.164. $\dfrac{\left(ctg\frac{\pi}{8}-tg\frac{\pi}{8}\right)\left(ctg\frac{5\pi}{18}+tg\frac{\pi}{9}\right)\left(1-tg\frac{\pi}{12}\right)}{\left(1-tg\frac{3\pi}{8}tg\frac{\pi}{8}\right)\left(1-tg\frac{2\pi}{9}tg\frac{\pi}{9}\right)\left(1-tg\frac{\pi}{12}\right)}$

Date izraze dovesti na što jednostavniji oblik:

13.165.a) sin2αcosα-cos2αsinα b) sin(α+β)sinβ+cos(α+β)cosβ

c) cos(α+β)+2sinαsinβ d) sin(α+β) - sin(α-β)

13.166.a) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$ b) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\,\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\,\sin\beta}$

c) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$ d) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta}$

13.167.a) cos(α+β)cos(α-β)+sin(α+β)sin(α-β)

b) sin(α+45°)cos(α-45°)-cos(α+45°)sin(α-45°)

13.168.a) sin53°sin67°-cos14°+cos37°cos23°

b) sin20°+sin13°sin57°-sin33°sin77°

c) sin200°sin310°+cos340°cos310°

d) sin30°cos30°tg30°+ sin30°cos30°ctg30°

13.169.a) $\sin^2(30^0-\alpha)+\sin^2(30^0+\alpha)-\sin^2\alpha$

b) $\cos^2(\alpha-60^0)+\cos^2(60^0+\alpha)+\cos^2\alpha$

13.170.a) tgαtgβ+(tgα+tgβ)tg(α+β) b) tg(45°+α) - $\dfrac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$

c) $\dfrac{tg(\alpha-\beta)+tg\beta}{tg(\alpha+\beta)-tg\beta}$ d) $\dfrac{tg(45^0-\alpha)+tg\alpha}{1-tg(45^0-\alpha)tg\alpha}$

13.171.a) $\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$ b) $\dfrac{ctg\alpha-1}{ctg\alpha+1}-ctg(45^0+\alpha)$ c) $\dfrac{3-tg^2 15^0}{3tg^2 15^0-1}$

13.172.a) $\dfrac{tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{ctg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+ctg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$ b) $\dfrac{tg\frac{9\pi}{28}-tg\frac{\pi}{4}}{1+tg\frac{9\pi}{28}tg\frac{\pi}{4}}$

13.173.a) cos2α-sin2αtgα b) sin4α ctg2α - cos4α

c) $\dfrac{2\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}-tg\beta$

13.174.a) $\dfrac{\cos^2(\beta-\alpha)+\cos^2(\alpha+\beta)}{2\sin^2\alpha\,\sin^2\beta}-ctg^2\alpha\,\,ctg^2\beta$

b) $tg^2\alpha-\dfrac{\sin^2(\beta+\alpha)+\sin^2(\beta-\alpha)}{2\cos^2\alpha\,\cos^2\beta}$

Dokazati istinitost datih jednakosti:

13.175.a) sin(45°+α)=cos(45°-α) b) cos(45°+α)=sin(45°-α)

c) $\cos\alpha\cos\beta(tg\alpha-tg\beta)=\sin(\alpha-\beta)$ d) $\frac{1}{2}\left(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\right)=\sin\left(30^0+\alpha\right)$

13.176.a) $\sin15°+tg30°\cos15°=\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$

13.177.a) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

b) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\cos^2\beta$

13.178.a) $\frac{tg\alpha+ctg\beta}{ctg\beta+tg\alpha}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$. b) $\sin\alpha-\cos\alpha\cdot tg\frac{\alpha}{2}=tg\frac{\alpha}{2}$

13.179.a) $tg(\alpha+\beta)-tg\alpha-tg\beta=tg\alpha tg\beta tg(\alpha+\beta)$

b) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin\left(45^0-\alpha\right)}{2\sin\left(60^0+\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{2}$.

13.180.a) $\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$

b) $\frac{(1-tg\alpha)\cos\left(45^0-\alpha\right)}{1+tg\alpha}=\cos\left(45^0+\alpha\right)$

13.181.a) $(tg\alpha+tg\beta)ctg(\alpha+\beta)+(tg\alpha-tg\beta)ctg(\alpha-\beta)=2$

b) $(ctg\alpha+ctg\beta)ctg(\alpha+\beta)-(ctg\beta-ctg\alpha)ctg(\alpha-\beta)=-2$.

13.182. Ako je $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$, dokazati da je $tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\gamma tg\alpha=1$.

13.183.* Dokazati da vrijednost izraza:

$\cos^2x+\cos^2(x-\alpha)-2\cos x\cos\alpha\cos(x-\alpha)$, ne zavisi od x.

13.184.* Ako je $\alpha+\beta=\gamma$, dokazati da je $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$.

13.185.*Ako je $\alpha+\beta+\gamma=180^0$, dokazati da je $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$.

13.186.* Ako je $\alpha+\beta+\gamma=180^0$, dokazati da je $tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha tg\beta tg\gamma$.

13.187.* Ako je $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\sin\beta=\frac{3}{4}$, $\sin\gamma=\frac{4}{5}$, pri čemu su α, β i γ oštri uglovi, izračunati $\sin(\alpha-\beta+\gamma)$.

13.11. Trigonometrijske funkcije dvostrukog ugla i poluugla

$$\sin2x=2\sin x\cos x \quad , \quad \cos2x=\cos^2x-\sin^2x$$

$$tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x},\ za\,x\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),x\neq\frac{\pi}{4}(2m+1),\ k,m\in Z.$$

$$ctg2x=\frac{ctg^2x-1}{2ctgx},\ za\,x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$$

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad , \quad \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$tg\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},\ za\,x\neq(2k+1)\pi,k\in Z.$$

$$ctg\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}},\ za\,x\neq2k\pi,\ k\in Z.$$

13.188. Ako je $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, izračunati $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $tg2\alpha$ i $ctg2\alpha$.

13.189. Ako je $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$, izračunati $\sin2\beta$ i $\cos2\beta$.

13.190. Izračunati $tg\alpha$ ako je $tg2\alpha=2$ i α se nalazi u četvrtom kvadrantu.

13.191 Izračunati $\sin\beta$ i $tg\beta$, ako je $\cos2\beta=-1/3$ i 2β se nalazi u trećem kvadrantu.

13.192. Izračunati $tg^22\alpha$ ako je $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

13.193.* Ako je $tg\alpha=3$, izračunati $\sin4\alpha$ i $\cos4\alpha$.

13.194. Izraziti u funkciji dvostrukog ugla:

a) $\sin\alpha$ b) $\cos\alpha$ c) $tg\alpha$ d) $ctg\alpha$

13.195. Izračunati $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ i $tg\alpha$ ako je $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{15}{17}$, i $\sin\frac{\alpha}{2}>0$.

13.196. Izračunati $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, ako je $tg\frac{\alpha}{2}=-\frac{5}{12}$, α u četvrtom kvadrantu.

13.197. Izračunati $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $tg2\alpha$ i $ctg2\alpha$ ako je $ctg\alpha=\sqrt{2}+1$.

13.198. Izračunati $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ i $ctg\alpha$ ako je $tg\frac{\alpha}{2}=0{,}3$.

13.199. Izračunati vrijednost izraza $\frac{\sin\alpha}{3-2\cos\alpha}$ ako je $tg\frac{\alpha}{2}=2$.

13.200. Ako je $\sin x=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$, $ab>0$, odrediti $\sin2x$, $\cos2x$ i $tg2x$.

13.201. Ako je $\cos x = \dfrac{2a}{1+a^2}$, odrediti sin2x, cos2x i tg2x.

13.202. Ako je $\sin x + \cos x = \dfrac{5}{4}$, odrediti sin2x, cos2x i tg2x.

13.203. Ako je $tgx = \dfrac{1}{4}$, tgy = 2, izračunati tg2x i ctg(2x-2y).

13.204. Ako je $\cos x = \dfrac{2}{3}$, $\sin y = \dfrac{1}{3}$, $270^0 < x < 360^0, 90^0 < y < 180^0$, izračunati sin(2x+y), cos(x-2y) i sin(2x+2y).

13.205. Ako je $\sin x \cos x = \dfrac{1}{4}$, x ugao trougla, izračunati x.

13.206. Izračunati sin4x ako je tgx = 3.

13.207. Izračunati cos4x ako je $ctgx = \dfrac{1}{2}$.

13.208. Izračunati vrijednost izraza:
a) $\cos^2 15^0 - \sin^2 15^0$ b) 2sin67°30'cos67°30' c) cos²22°30'- sin²22°30'

13.209. Izračunati vrijednost izraza:

a) $1-2\sin^2 15^0$ b) $\dfrac{tg15^0}{1-tg^2 15^0}$ c) $\dfrac{2\cos^2 15^0 - 1}{1-2\sin^2 22^0 30'}$

Uprostiti date izraze:

13.210.a) $4\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha$ b) $\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha$
c) $2\cos^2\alpha - 1$ d) $1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

13.211.a) $\cos2\alpha - 2\cos^2\alpha$ b) $\cos2\alpha + 2\sin^2\alpha$
c) $\sin2\alpha - (\sin\alpha+\cos\alpha)^2$ d) $\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$

Skratiti date razlomke:

13.212.a) $\dfrac{\sin 10^0}{\sin 20^0}$ b) $\dfrac{\sin 22^0}{\sin 44^0}$ c) $\dfrac{\sin 40^0}{\sin 20^0}$ d) $\dfrac{\sin 3x}{\sin 6x}$

13.213.a) $\dfrac{\sin 10^0}{1-\cos 20^0}$ b) $\dfrac{\cos x}{\sin 2x}$ c) $\dfrac{\cos x}{1+\cos 2x}$ d) $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$

Uprostiti date izraze :

13.214.a) $2\cos 23^0\cos 67^0$ b) 2sin70°sin20°
c) (cos70° - cos20°)(sin70° + sin20°) d) 2cos50°cos40°

13.215.a) $2\cos 40^0\cos 50^0$ b) $\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0$
c) $8\cos 10^0\cos 20^0\cos 40^0$ d) $8\cos 5^0\cos 10^0\cos 20^0\cos 85^0$

13.216.a) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$ b) $\dfrac{1-\sin\alpha}{\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}$ c) $\dfrac{1}{tg\alpha + ctg\alpha}$

13.217.a) $2\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{3\pi}{14}$ b) $\dfrac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2-\cos 2\alpha}{2\sin^2\alpha - \sin 2\alpha}$

Dokazati date jednakosti:

13.218.a) $4\sin 18^0\cos 36^0 = 1$ b) $\sin 70^0\sin 50^0\sin 10^0 = \dfrac{1}{8}$

c) $\sin 40^0\sin 50^0 = \dfrac{1}{2}\cos 10^0$

13.219.a) $\sin3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ b) $\cos3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

13.220. $\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha = \dfrac{\sin 8\alpha}{16\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

13.221.a) $\dfrac{tg^2(45^0+\alpha)-1}{tg^2(45^0+\alpha)+1} = \sin 2\alpha$ b) $\dfrac{tg^2\alpha + ctg^2\alpha - 6}{tg^2\alpha + ctg^2\alpha + 2} = \cos 4\alpha$

13.222. Ako je 3tgα=2tgβ, dokazati da je $tg(\beta-\alpha) = \dfrac{\sin 2\alpha}{5-\cos 2\alpha}$.

Bez upotrebe kalkulatora i tablica izračunati:

13.223.a) sin15° b) sin22°30' c) cos22°30' d) tg22°30'

13.224.a) $\sin\dfrac{\pi}{8}$ b) $\cos\dfrac{\pi}{8}$ c) $\sin\dfrac{\pi}{12}$ d) $tg\dfrac{\pi}{12}$ e) $ctg\dfrac{\pi}{8}$

13.225. Ako je $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $180^0 < \alpha < 270^0$, izračunati $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ i $tg\dfrac{\alpha}{2}$.

13.226. Ako je $ctg\alpha = -\dfrac{4}{3}$, $90^0 < \alpha < 180^0$, izračunati $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ i $tg\dfrac{\alpha}{2}$.

13.227. Izračunati $\sin\dfrac{\pi}{24}$, $\cos\dfrac{\pi}{24}$, $tg\dfrac{\pi}{24}$ i $ctg\dfrac{\pi}{24}$.

Uprostiti date izraze:

13.228.a) $\sqrt{\dfrac{1-\cos 4\alpha}{2}}$ b) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\alpha}{4}}{2}}$ c) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\alpha}{6}}{1-\cos\dfrac{\alpha}{6}}}$

13.229.a) $\sqrt{\dfrac{1-\cos 3x}{1+\cos 3x}}$ b) $\sqrt{\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)+1}{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}}$ c) $2\cos^2\dfrac{x}{2}-\cos x$

13.230.a) $\sqrt{2+2\cos\alpha}$, gdje je $\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$ b) $\sqrt{2(1+\sin 2\alpha)}$

13.231.a) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4x}}$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ b) $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot ctg\dfrac{x}{2}-\sin^2 x$

13.232. Dokazati da vrijedi:

a) $\sin\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ b) $\cos\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

c) $\cos^2\dfrac{\pi}{32}=\dfrac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{4}$

13.233. Skratiti razlomke:

a) $\dfrac{1-\cos x}{\sin\dfrac{x}{2}}$ b) $\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$ c) $\dfrac{1+\cos 2x}{\cos x}$ d) $\dfrac{1-\cos\dfrac{x}{2}}{1+\cos\dfrac{x}{2}}$

13.234. Dokazati jednakosti:

a) $\sin x=\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}$ b) $\sin x=\dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}$

c) $tgx=\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1-tg^2\dfrac{x}{2}}$ d) $ctgx=\dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{2tg\dfrac{x}{2}}$

13.235. Odrediti vrijednost izraza

$$5\sin x+8\cos x+3tg\frac{x}{2},\ ako\ je\ tg\frac{x}{2}=\frac{13}{3}.$$

Dokazati identitete:

13.236.a) $\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{2\sin x+\sin 2x}=tg^2\dfrac{x}{2}$ b) $\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}=tg\dfrac{x}{2}$

c) $tg\dfrac{x}{2}+2\sin^2\dfrac{x}{2}ctgx=\sin x$ d) $\dfrac{\sqrt{2}-\cos x-\sin x}{\sin x-\cos x}=tg\dfrac{x-45^0}{2}$

13.237. $\sin\alpha(\sin\alpha+\sin\beta)+\cos\alpha(\cos\alpha+\cos\beta)=2\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

13.238. $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

13.239.a) $tg\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$, za $x\ne k\pi$, $k\in Z$. b) $tg\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$, za $x\ne(2k+1)\pi$, $k\in Z$.

13.240. Izračunati bez upotrebe tablica vrijednost izraza:

$$\cos^4\frac{\pi}{8}+13\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}.$$

13.241. Dokazati da je: a) $tg15^0+ctg15^0=4$ b) $ctg\dfrac{\pi}{8}-tg\dfrac{\pi}{8}=2$.

13.242.* Ako je $\cos\alpha=\dfrac{a}{b+c}$, $\cos\beta=\dfrac{b}{a+c}$, $\cos\gamma=\dfrac{c}{a+b}$, dokazati da je

$$tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{1}=1.$$

Dokazati identitete:

13.243.* $\dfrac{1-\sin x}{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}=tg\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$

13.244.* $\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}=ctg\dfrac{x}{2}$, za $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

REZULTATI, UPUTE, RJEŠENJA

1. STEPENI i KORIJENI

1.1. STEPENI SA PRIRODNIM IZLOŽIOCEM (EKSPONENTOM)

1.1.a) 16 b) 25 c) 4 d) 1000 **1.2.**a) 32 b) 16 c) -81 d) -25

1.3.a) -1 b) -1000 c) 625 d) 1024 **1.4.**a) 1 b) 12 c) 15

1.5.a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{8}{125}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{9}{16}$ **1.6.**a) 100 b) 184

1.7.a) $9a^4+2a^2$ b) $6x^4+a^3$ c) $11x^6-8x^3$

d) $6x^7-x^8$ e) x^3+a^2 f) $3a^4+4a^3$

1.8.a) $5a^2+a+2a^3$ b) $11a^4-6a^3-11a^2+5a$

c) $12a^4+2a^2+10a$ d) $5a^5+2a^4+3a^2+4$

1.9.a) 4^6 b) 3^{17} c) 7^{13} d) 2^{14}

1.10.a) 5^5 b) 3^{12} c) 7^{19} d) 2^{23}

1.11.a) $\frac{256}{625}$ b) $\frac{64}{729}$ c) $\frac{243}{3125}$ d) $\frac{1}{1024}$ **1.12.**a) $2^{10}=1024$ b) 4^{10}

c) a^{19} d) b^{14} **1.13.**a) 8 b) 10^5 c) a^3 d) b^2

1.14.a) 4 b) 625 c) 16 d) 0,01

1.15.a) a^5 b) a^3 c) y^6 d) b^6

1.16.a) $(2^3)^2=2^6=64$ b) 3^8 c) 5^6 d) 1

1.17.a) -3^6 b) 3^8 c) 5^8 d) 1

1.18.a) x^9 b) a^{48} c) b^{63} d) y^{12}

1.19.a) a^{20} b) x^6 c) b^{14} d) y^{120}

1.20.a) $(a-3)^{10}$ b) $(b+1)^6$ c) 5^8 d) 1 **1.21.** 16, 15

1.22. -11, -21 **1.23.** -62 **1.24.** 9 **1.25.** -16

1.26. $=\frac{a+1}{ab}=-1{,}25.$ **1.27.**a) x^{29} b) a^{24} c) x^{32} d) x^{27}

1.28.a) x b) a^6 c) x^8 d) x^3

1.29.a) a^2 b) a^6 c) x^9 d) x^{11}

1.30.a) a^{m-n} b) a^{m+3} c) x^{1-9m} d) $a^{x+4}+a^{x+6}$

1.31.a) $a^{2m+2}x^{8n+1}$ b) $a^{2m+4}y^{2n+6}$ c) x^{11m+4}

1.32.a) $a^{2x+1}+a^{2x}-a^{2x+5}-a^{2x+2}$ b) $x^{2m+3}-x^{2m}+x^{2m+5}+x^{2m+6}$

1.33.a) a^6+2b b) x^9-5a^2x c) $1-5bx^4$

1.34.a) $5^3 2^3 =(5\cdot 2)^3=10^3=1000$ b) 64 c) 100^3 d) 10^5

1.35.a) 8 b) $\frac{1}{9}$ **1.36.** a) 2^5 b) 4^2 c) 3^6 d) 3^5

1.37.a) a^2 b) $(x-a)^{4n+4}$ c) a^{2-x}

1.38.a) a^{x+2} b) a^3 c) x^{-n} **1.39.**a) $ax^{m-n}+8x^{m-n}$ b) a^n+b^n c) a^n-b^n

1.40.a) $30^x5^x:6^x=(30\cdot5)^x:6^x=(150:6)^x=25^x$ b) 5^{2x} c) 4^{2x}

1.41.a) 5 b) $\frac{1}{7}$ c) 6 **1.42.**a) $\frac{13\cdot3^9}{19}$ b) $\frac{1}{2}$

1.43.a) $\frac{b^4}{d}$ b) $\frac{3xy^2}{2ab^2}$ **1.44.**a) $\frac{n^2-m^2}{a^2-b^2}$ b) 1 **1.45.** ap

1.2. Stepeni s cijelim eksponentom

1.46.a) 1 b) 1 c) 1 d) -1

1.47.a) -1 b) 1 c) -1 **1.48.**a) $\frac{1}{3^3}=\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{100}$ d) 1

1.49.a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{9}{8}$ d) $\frac{b}{a}$ **1.50.**a) $\frac{81}{16}$ b) $\frac{343}{125}$ c) $\frac{b^k}{a^k}$ d) $\frac{n^p}{m^p}$

1.51.a) 10000 b) -16 c) -25 d) -1000

1.52.a) $\frac{1}{5a^2c^4}$ b) $\frac{1}{(m-n)^2}$ c) $\frac{1}{7^3a^4b^5}$

1.53.a) xy-2 b) $\frac{2b^3}{a}$ c) $\frac{4a^2b^3}{7}$ d) $2b^2x$

1.54.a) $\frac{9x^6y^7z}{7}$ b) $\frac{23a^p}{19b^p}$ c) $\frac{8x^my^{2m}}{9}$

1.55.a) 5 b) a^{-8} c) a d) x^{-4} **1.56.**a) a b) a^2 c) x^{-3} d) x^{15}

1.57.a) 6 b) $6^{-1}\cdot7^4$ c) $\frac{mp}{5n}$

1.58.a) 2^5ab^7 b) $(y-x)^{-1}$ c) $5a^7b^{-4}c^2$

1.59.a) $a^{-4}+2a^{-2}b^{-1}+b^{-2}$ b) $x^{-4}-y^{-4}$ c) $\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}$

1.60.a) $\frac{8-x^6}{x^6}$ b) $\frac{2y-3x}{xy}$ **1.61.**a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) 1

1.62.a) $\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^3$ b) $\frac{1+a}{1-a}$ **1.63.**a) $\frac{1}{m-1}$ b) $\frac{b(b^2-ab+b^2)^{-2}}{(b-a)^2}$

1.64. 1 **1.65.** $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$ **1.66.** 2b **1.67.** 2 **1.68.** $\frac{26}{9}$

1. 3. Korijeni. Aritmetički korijen

1.69.a) 6 b) 16 c) 2 d) 2

1.70.a) 8 b) 32 c) 26 d) 3 **1.71.**a) 15 b) 25 c) 3 d) 2

1.72.a) 5 b) 15 c) 16

1.73.a) $\sqrt{21^2+28^2}=\sqrt{(3\cdot7)^2+(4\cdot7)^2}=\sqrt{3^2\cdot7^2+4^2\cdot7^2}=\sqrt{(3^2+4^2)\cdot7^2}=$
$=\sqrt{5^2\cdot7^2}=5\cdot7=35.$ b) 65 c) 104

1.74.a) Izraz x+2 mora biti nenegativan: $x+2\geq0 \Rightarrow x\geq-2$. b) $x\geq-5$ c) $x\geq7$

1.75.a) $x\geq4$ b) $x\leq2$ c) $x\geq-5$ **1.76.** *a)* $x\leq\frac{1}{2}$ *b)* $x\geq\frac{1}{2}$ *c)* $x\geq\frac{1}{11}$

1.77.a) $x\in R$ b) $x\in R$ c) $x\in R$

1.78.a) 17 b) 60 c) 09 **1.79.**a) 1 b) 3 c) 16

1.80.a) a-3 b) 3-a c) -(x+1) **1.81.**a) x-5 b) 16-2x c) -(x+3)

1.82.a) ... $=3\cdot5=15$ b) ...$=6\cdot8\cdot10=480$ c) $=9\cdot25\cdot0{,}01=225\cdot0{,}01=2{,}25$

1.83.a) 60 b) 33,6 c) 3300

1.84.a) $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{5}$

1.85.a) $6\sqrt{2}$ b) $8\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{3}$ d) $4\sqrt[3]{2}$

1.86.a) $3a\sqrt{3}$ b) $5x\sqrt{3x}$ c) $4ab^2\sqrt{7ab}$ d) $2a^2b^3\sqrt{5ab}$

1.87.a) $6a^3b^5\sqrt{2b}$ b) $2ab\sqrt[3]{2ab^2}$ c) $3a^2x^3\sqrt[3]{2ax^2}$

1.88.a) $|a-3|$ b) $|x-1|\cdot\sqrt{x-1}$ c) $ab\cdot\sqrt[n]{a^2}$

1.89.a) $5\sqrt{2}=\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{5^2\cdot2}=\sqrt{50}$ b) $\sqrt{28}$ c) $\sqrt{45}$ d) $\sqrt{48}$

1.90.a) $\sqrt[3]{250}$ b) $\sqrt[3]{192x}$ c) $\sqrt[3]{48}$ d) $\sqrt[5]{486}$

1.91.a) $\sqrt{a^3}$ b) $\sqrt{5x^3}$ c) $\sqrt[3]{b^4}$ d) $\sqrt{12a^2}$

1.92.a) $\sqrt{2a^5}$ b) $\sqrt{2x^7}$ c) $\sqrt[3]{2\cdot5^6}$ d) $\sqrt[3]{27b^4}$

1.93.a) $7\sqrt{7}$ b) $18\sqrt{2}$ c) $15\sqrt{5}$

1.94.a) $14\sqrt{3}$ b) $20\sqrt{2}$

1.95.a) $6\sqrt{3}-3\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{7}+6\sqrt{6}$

1.96.a) $9\sqrt[3]{3}-3\sqrt{3}$ b) $17\sqrt{5}+2\sqrt[3]{5}$

1.97.a) $3\sqrt[4]{3}+2\sqrt[3]{3}$ b) $3\sqrt[3]{5}-3\sqrt[4]{5}$ **1.98.**a) 160 b) 630 c) 192

1.99.a) $3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}-16\sqrt{3}=-12\sqrt{3}$ c) $26\sqrt{2}$

1.100.a) $7\sqrt{3}$ b) $15\sqrt{5}$ **1.101** a) $2\sqrt{7}-14\sqrt{5}+22\sqrt{11}$ b) $-8\sqrt{2}$

1.102.a) $19\sqrt{2}+\sqrt{5}-7$ b) $5\sqrt{0{,}1}+0{,}4\sqrt{2}-\sqrt[3]{9}$

1.103. a) $3\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{5}$ b) $2\sqrt[3]{5}-12\sqrt{5}+14\sqrt[3]{3}$

1.104.a) $\sqrt{30}$ b) $2\sqrt{15}$ c) $\sqrt{66}$

1.105.a) $\sqrt{35}$ b) 6 c) 10 **1.106**.a) $\sqrt[4]{40}$ b) $\sqrt[5]{48}$ c) $2\sqrt[3]{6}$

1.107.a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt[3]{12}$ c) $\sqrt[7]{192}$

1.108.a) $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4\cdot 3]{2^3} = \sqrt[12]{8}$ b) $\sqrt[4]{25}$ c) $\sqrt[12]{10000}$

1.109.a) $\sqrt[8]{4a^6}$ b) $\sqrt[12]{81\,a^8}$ c) $\sqrt[15]{343\,a^9}$

1.110.a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[10]{10}$

1.111.a) $\sqrt[4]{a^3}$ b) $\sqrt[5]{a^3}$ c) $\sqrt[7]{a}$ d) $\sqrt{x^3}$

1.112.a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^2\cdot 2} = \sqrt[4]{8}$ b) $\sqrt[6]{64} = 2$

c) $\sqrt[10]{32} = \sqrt{2}$ **1.113**.a) $\sqrt[12]{3^3\cdot 2^4} = \sqrt[12]{27\cdot 16} = \sqrt[12]{432}$

b) $\sqrt[15]{2\cdot 4^6}$ c) $\sqrt[14]{1152}$

1.114.a) $\sqrt[12]{a^{11}}$ b) $\sqrt[6]{2x^5}$ c) $\sqrt[20]{b^{19}}$

1.115.a) $\sqrt[12]{8a^9x^8}$ b) $\sqrt[30]{x^{47}} = x\sqrt[30]{x^{17}}$ c) $\sqrt[36]{a^{47}} = a\sqrt[36]{a^{11}}$

1.116.a) $\sqrt[60]{a^{29}}$ b) $\sqrt[48]{x^{41}}$ c) $\sqrt[66]{a^{22}} = \sqrt[3]{a}$

1.117.a) $\sqrt[12]{x^{17n}}$ b) $\sqrt[12]{20a^9x^{9n}}$ **1.118**.a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{120}$

1.119.a) $3\sqrt{2}+2\sqrt{30}$ b) $\sqrt{35}-3\sqrt{10}$ c) $4\sqrt{10}+\sqrt{15}$

1.120.a) $8+2\sqrt{15}$ b) $22-4\sqrt{10}$ c) $137-20\sqrt{15}$

1.121.a) -3 b) 128 **1.122**.a) 5 b) 12

1.123.a) $14\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{2}+3\sqrt{3}-\sqrt{6}-4$

1.124.a) 4 b) 6 **1.125**.a) 8 b) 2

1.126. **Napomena**: U zadacima u kojima se pojavljuju varijable, korijene posmatramo samo za one vrijednosti tih varijabli za koje su definisani.

a) -1 b) -2

1.127.a) $5\sqrt[3]{5}-4\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt{10}-\sqrt{5}$ **1.128.**a) 5 b) 3

1.129.a) b^2 b) $\sqrt{a^2+b^2}$

1.130.a) $$\frac{1}{a-\sqrt{a^2-1}}-\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}=\frac{a+\sqrt{a^2-1}-\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)}{\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)}=\frac{2\sqrt{a^2-1}}{1}=2\sqrt{a^2-1}.$$

b) $$\frac{m\sqrt{m^2+a}+m^2+a}{m+\sqrt{m^2+a}}=\frac{\left(m+\sqrt{m^2+a}\right)\sqrt{m^2+a}}{m+\sqrt{m^2+a}}=\sqrt{m^2+a}$$

1.131.a) $17+2\sqrt{3}$ b) $2\left(20+\sqrt{10}\right)$ **1.132**.a) 2 b) 5 c) 5

1.133.a) $2\sqrt{2}$ b) 2 c) 0,1

1.134.a) a b) x c) $\sqrt[5]{a^3}$ d) $\sqrt{22}$ e) $\sqrt[5]{5}$ f) $\sqrt[7]{a^3}$

1.135.a) 0,2 b) $a^{-2}b$ c) $2a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}$ **1.136**.a) 8 b) 3

1.137.a) $(a-b):\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\left[\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2\right]:\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=$

$=\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\right]:\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$ b) $\sqrt{a}-\sqrt{b}.$

1.138.a) $\sqrt[3]{6}:\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{6^2:2}=\sqrt[6]{18}$ b) $\sqrt[15]{8}:\sqrt[5]{2}=\sqrt[15]{8:2^3}=\sqrt[15]{1}=1$

c) $\sqrt[12]{2}$ **1.139**.a) $\sqrt[6]{\frac{9}{2}}$ b) $\sqrt[15]{16}$ c) $\sqrt[12]{\frac{1}{32}}$ **1.140**.a) $\sqrt[12]{\frac{a}{16}}$ b) $x^2\cdot\sqrt[4]{3}$

c) $\sqrt[12]{a}$ d) $\sqrt[6]{3}:\sqrt[24]{2}=\sqrt[24]{3^4:2}=\sqrt[24]{\frac{81}{2}}$ e) $\sqrt[4]{\frac{3^7}{2^6}}$ f) $\sqrt[40]{2048\,a^{13}}$

1.141.a) $\sqrt[6]{a^{1-6n}}=\frac{\sqrt[6]{a}}{a^n}$ b) $\sqrt[6]{a^{5n-12}}$ c) $\sqrt[12]{a^7x^{-3n}}$

1.142.a) $\left(4\sqrt{27}-6\sqrt[3]{3}\right):\sqrt{3}=4\sqrt{27}:\sqrt{3}-6\sqrt[3]{3}:\sqrt{3}=12-6\cdot\sqrt[6]{3^{-1}}$

b) $$\frac{a^2\cdot\sqrt[6]{a^5}-\sqrt[15]{a^{11}}-a\sqrt[3]{a^2}}{3a^2}$$

1.143.a) $\frac{a\cdot\sqrt[4]{b^3}-\sqrt[6]{b^5}}{b}$ b) $b\cdot\sqrt[8]{2a^4b}+ab\cdot\sqrt[12]{8a^5b^{10}}-ab^2\cdot\sqrt[4]{a^3b}$

1.144.a) $\sqrt[12]{a^{13n+4}}$ b) $a^3\sqrt[12]{a^{19n+9}}$ **1.145**.a) 3 b) $5\sqrt{5}$ c) 44 d) $192\sqrt{3}$

1.146.a) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^2=\sqrt[3]{\left(a^2\right)^2}=a\sqrt[3]{a}$ b) $x\sqrt[3]{a^2x}$

c) $a\sqrt[4]{27a^2b^3}$ d) $3^5a^3b^2\cdot\sqrt[7]{32a^4b}$

1.147.a) $a^2\sqrt[3]{a^2}$ b) $a^2x^2\sqrt[3]{a^2}$ c) $2a^4x^7\sqrt{2ax}$ d) $2ax^4\sqrt[5]{2ax}$

1.148.a) $\sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[10]{3}$ c) $\sqrt[24]{5}$ d) $\sqrt[30]{12}$

1.149.a) $\sqrt[6]{11}$ b) $\sqrt[36]{4}=\sqrt[18]{2}$ c) $\sqrt[16]{5}$ d) $\sqrt[18]{6}$

1.150.a) $\sqrt[10]{a}$ b) $\sqrt[8]{x}$ c) $\sqrt[12]{y}$ d) $\sqrt[24]{ax^2}$

1.151.a) $\sqrt[6]{54}$ b) $\sqrt{\sqrt[4]{5^4\cdot 3\sqrt{2}}}=\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt{\left(5^4\cdot 3\right)^2\cdot 2}}}=\sqrt[16]{18\cdot 5^8}$

c) $\sqrt[42]{5\cdot 48^3}$ d) $\sqrt[27]{2^{13}}$ **1.152**.a) $\sqrt[4]{8}$ b) $a^2\cdot\sqrt[6]{a}$

c) $\sqrt[12]{48a^5}$ d) $\sqrt[8]{25ax^6}$ **1.153**.a) $10\sqrt[4]{75}$ b) $\sqrt[4]{2}$

1.154.a) $2\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ c) $\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{7}}{5}$ d) $\frac{5\sqrt{15}}{6}$

1.155.a) $\frac{11\sqrt{3}}{15}$ b) $\frac{4\sqrt{6}}{7}$ c) $\frac{(2-\sqrt{5})\sqrt{7}}{42}$ d) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{5}}{30}$

1.156.a) $4(\sqrt{2}+1)$ b) $\frac{7(\sqrt{6}-2)}{2}$ c) $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})\sqrt{5}}{3}$ d) $\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}$

1.157.a) $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}$ b) $\frac{-(\sqrt{5}-3)(2+\sqrt{7})}{6}=\frac{3\sqrt{7}-2\sqrt{5}-\sqrt{35}+6}{6}$

c) $\frac{(10+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})}{7}$ d) $\frac{(\sqrt{10}+\sqrt{5})(5\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{75-8}=\frac{(\sqrt{10}+\sqrt{5})(5\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{67}$

1.158.a) $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(3\sqrt{3}+4\sqrt{2})}{-5}$ b) $\frac{(2\sqrt{5}-\sqrt{3})(2\sqrt{7}-3\sqrt{2})}{10}$ c) $\frac{(3\sqrt{7}+4)(2\sqrt{6}+\sqrt{2})}{22}$

1.159.a) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}=\frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}}=\frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{4\sqrt[3]{4}}{2}=2\sqrt[3]{4}$. b) $3\cdot\sqrt[3]{5}$ c) $3\cdot\sqrt[4]{8}$ d) $50\cdot\sqrt[5]{4}$

1.160.a) $\frac{\sqrt[6]{5^5}}{5}$ b) $\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{8}}{2}$ c) $\frac{(1-\sqrt{2})\sqrt[5]{3^4}}{3}$ d) $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\sqrt[6]{32}}{2}$

1.161.a) $2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)$ b) $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$

c) $4(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)$ d) $\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{4}+4$

1.162.a) $\frac{11}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{11[(2+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{[(2+\sqrt{3})+\sqrt{5}][(2+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}=\frac{11[(2+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{(2+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=$

$=\frac{11(2+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2+4\sqrt{3}}=\frac{11(2+\sqrt{3}-\sqrt{5})(1-2\sqrt{3})}{2(1+2\sqrt{3})(1-2\sqrt{3})}=\frac{11(2-4\sqrt{3}+\sqrt{3}-6-\sqrt{5}+2\sqrt{15})}{2\cdot(1-12)}=$

$=\frac{11(-4-3\sqrt{3}-\sqrt{5}+2\sqrt{15})}{2\cdot(-11)}=\frac{4+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{2}$.

b) $\frac{3(5\sqrt{2}-4\sqrt{3}+3\sqrt{6}-6)}{2}$. c) $\frac{3\sqrt{10}-5\sqrt{6}+4\sqrt{15}}{30}$.

1.163.a) Uputa: Racionalisati nazivnik svakog razlomka. Rezultat: 28.

b) $\frac{2}{\sqrt{10}+5}+\frac{5}{\sqrt{10}-2}-\frac{7}{\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{5})}+\frac{5}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}-\frac{7}{\sqrt{10}}=$

$=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{2})+5\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}-\frac{7}{\sqrt{10}}=\frac{7\sqrt{10}-21}{3\sqrt{10}}-\frac{7}{\sqrt{10}}=\frac{7}{3}$.

1.164.a) Prvo racionalisati nazivnik svakog razlomka! Rez.: $9+2\sqrt{7}-\sqrt{11}$.

b) $\frac{2+11\sqrt{2}}{2}$

1.165.a) $\frac{a^2+1+a\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2+1}}=\frac{(\sqrt{a^2+1}+a)\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}$. b) $\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$

1.166.a) $\frac{a}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}+1}+\frac{1}{1-\sqrt[3]{a}}=\left(\frac{a}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{1}{\sqrt[3]{a}-1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}+1}-\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}\right)=$

$=\frac{a-1}{\sqrt[3]{a}-1}+\frac{1-\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}=\frac{(\sqrt[3]{a})^3-1^3}{\sqrt[3]{a}-1}+\frac{1^2-(\sqrt[3]{a})^2}{\sqrt[3]{a}+1}=\frac{(\sqrt[3]{a}-1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1)}{\sqrt[3]{a}-1}+\frac{(1-\sqrt[3]{a})(1+\sqrt[3]{a})}{\sqrt[3]{a}+1}=$

$=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}{1}+\frac{1-\sqrt[3]{a}}{1}=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1+1-\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^2}+2$. b) 4

1.167. $\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{ab}}$ **1.168.** $\sqrt{a-b}$

1.169.a) Uputa: $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}=\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}$. Ako je $a\geq 2$ vrijednost izraza je $2\sqrt{a-1}$ i ako je $1\leq a<2$, tada je vrijednost izraza 2.

b) Kako je: $\left(\sqrt{2a^2-4}+2\right)^2=2a^2+4\sqrt{2a^2-4}=2\left(a^2+\sqrt{2a^2-4}\right)$ i

$\left(\sqrt{2a^2-4}-2\right)^2=2a^2-4\sqrt{2a^2-4}=2\left(a^2-\sqrt{2a^2-4}\right)$, to vrijedi:

$\sqrt{a^2+2\sqrt{2a^2-4}}+\sqrt{a^2-2\sqrt{2a^2-4}}=$

$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2a^2-4}+2\right)^2}{2}}+\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2a^2-4}-2\right)^2}{2}}=\frac{\sqrt{2a^2-4}+2}{\sqrt{2}}+\frac{\left|\sqrt{2a^2-4}-2\right|}{\sqrt{2}}$.

Ako je $\sqrt{2a^2-4}-2\geq 0$, odnosno, $|a|\geq 2$, tada je vrijednost izraza $2\sqrt{a^2-2}$.

Ako je $\sqrt{2}\leq a\leq 2$, tada je vrijednost izraza $x=2\sqrt{2}$.

1.170. Uvrštavanjem date vrijednosti za x u izraz i sređivanjem dobije se:

$$-2\sqrt{3}-8=-2(\sqrt{3}+4)$$

1.171. Prvo "srediti" dati izraz, a zatim uvrstiti vrijednost za x! Nakon ukupnog sređivanja dobije se: $\frac{a+am^2+a\sqrt{(1-m^2)^2}}{2am}$. Rezultat: 1) m za $|m|>1$ i

2) $\frac{1}{m}$, $|m|\leq 1$, $m\neq 0$.

1.172. n za $n\geq 1$ i $\frac{1}{n}$ za $0<n<1$ **1.173.** $a=2+\sqrt{3}$, $b=2-\sqrt{3}$, R.: 1

1.174. a-b. **1.175.** $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2+1}$.

1.176.a) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\frac{8\left(2+\sqrt{5}\right)}{8}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{1+3\sqrt{5}+3\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^3}=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{1+3\sqrt{5}+3\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^3}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

b) $\sqrt[3]{\frac{11+3\sqrt{5}+2\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}{2}}=\sqrt[3]{\frac{11+3\sqrt{5}+2\cdot\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}}=\sqrt[3]{\frac{12+4\sqrt{5}}{2}}=\sqrt[3]{6+2\sqrt{5}}.$

1.177.* Kako je $\left(\sqrt{2}+1\right)^3=2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1=5\sqrt{2}+7$ i $\left(\sqrt{2}-1\right)^3=5\sqrt{2}-7$,

to je: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3}=\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)=2$.

b) Kako je $20+14\sqrt{2}=\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ i $20-14\sqrt{2}=\left(2-\sqrt{2}\right)^3$, to se lijeva strana jednakosti koju treba dokazati, može transformisati ovako:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4.$$

1.178.*a) $\sqrt{4+\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\sqrt{4+\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$

b) Kako je $6+4\sqrt{2}=\left(2+\sqrt{2}\right)^2$ i $6-4\sqrt{2}=\left(2-\sqrt{2}\right)^2$, to vrijedi

$$\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2=\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\left(2-\sqrt{2}\right)}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}+\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)^2=\left(\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\sqrt{2}+1}+\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\sqrt{2}-1}\right)^2=\left(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2=8.$$

1.179. $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}=\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)^2}\sqrt{4-\sqrt{15}}=$

$$=\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)^2\left(4-\sqrt{15}\right)}=\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)=5-3=2.$$

1.180. Uputa: $\frac{1-\sqrt[4]{a^3}}{1-\sqrt[4]{a}}=\frac{\left(1-\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2}\right)}{1-\sqrt[4]{a}}=1+\sqrt[4]{a}+\sqrt{a}$.

1.181. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)}=.$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{4-\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=\sqrt{4-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4-3}=1.$$

1.182. $\sqrt{x+1}$ **1.183.** -1

1.184.a) a+b, ab>0 b) 1, ako je x>1; $\frac{x^2+1}{1-x}$, ako je x<1, $|x|\neq 1, x\neq 0$.

1.185.a) $\frac{\sqrt[3]{x^2}\left(x^2-\sqrt{x^4-1}\right)}{2}$, $|x|>1$ b) $\sqrt{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\frac{9}{2}}=$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(2\sqrt{6}+4\sqrt{3}+2\sqrt{2}+9\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1.$$

1. 4. Stepeni s racionalnim eksponentom

1.186.a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt[3]{64^2}$ d) $\sqrt{100}$

1.187.a) $\sqrt[3]{125}$ b) $=9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}$ c) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

1.188.a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $10^{\frac{1}{2}}$ c) $17^{\frac{1}{3}}$ d) $\left(ax^2\right)^{\frac{1}{5}}$

1.189.a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ b) $12^{\frac{1}{5}}$ c) $a^{\frac{8}{11}}$ d) $\left(3x^2\right)^{\frac{1}{4}}$

1.190.a) 2 b) 4 c) 16 d) 10

1.191.a) 3 b) 2 c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{81}$ **1.192.**a) 5 b) 3 c) 128 d) 2

1.193.a) 4 b) 3^{-1} c) $\frac{3}{32}$ d) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt[8]{\frac{2}{3}}$ **1.194.**a) 12 b) $\frac{273}{100}$

1.195.a) $2^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{5}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}$ b) 2

1.196.a) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{6}}$ b) 1 c) x d) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}:a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}}$.

1.197.a) $a^{\frac{1}{3}}$ b) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ c) $\frac{3}{2}ab^{3}$ d) $a^{\frac{5}{12}}\cdot b^{\frac{1}{6}}$

1.198. Neposrednom zamjenom vrijednosti za x, nakon sređivanja, dobije se $\frac{n-m}{|m-n|}$.

Rezultat: Ako je m>n, vrijednost izraza je -1. Ako je m<n, vrijednost je 1.

1.199. Rezulat: 2 za m>2 i -2 za 1≤m<2.

1.200. Rezultat: $\frac{(\sqrt{m-1})\sqrt{1-m}}{\sqrt{m}}$, ako je $0<m\leq 1$ i $\frac{(1-\sqrt{m})\sqrt{m-1}}{\sqrt{m}}$, ako je $m>1$.

1.201. $\frac{\sqrt{mn}}{n}$ **1.202.** $\frac{2}{x^2-1}$ **1.203.** $\sqrt[3]{(a-b)^2}$

1.204. $$\frac{(x^2-y^2)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=$$

$$=\frac{(x+y)(x-y)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{(x+y)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}\right)}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=\frac{(x-y)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=$$

$$=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=\frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=$$

$$=\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=\sqrt[3]{x^2}.$$

2. HOMOTETIJA i SLIČNOST

2.1. Kružnica i krug

2.1. Skup tačaka ravni koje su jednako udaljene od jedne tačke (O) te ravni naziva se **kružnica**. Tačka O se naziva **središte kružnice**. Duž čiji je jedan kraj središte kružnice a drugi kraj ma koja tačka kružnice naziva se **radijus (poluprečnik) kružnice**. Duž čiji su krajevi tačke kružnice naziva se **tetiva**. Najduža tetiva naziva se **prečnik (dijametar)** kružnice.

Skup tačaka koje pripadaju unutrašnjoj oblasti kružnice zajedno sa tačkama te kružnice, naziva se **krug**.

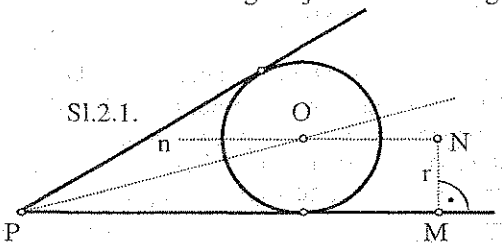
2.2. Kružnica je određena središtem (centrom) i radijusom (poluprečnikom).

2.3. Uputa: Središte kružnice O nalazi se na presjeku simetrala duži AB i BC. Radijus kružnice je OA (=OB=OC).

2.4. Uputa: Središte kružnice je presjek simetrale duži AB i kružnice k(A, r).

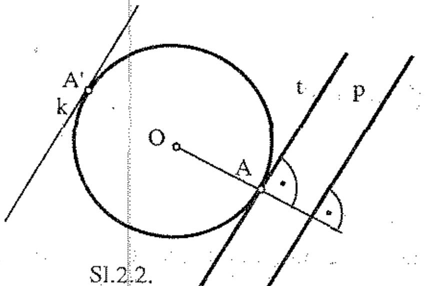
2.5. Uputa: Središte kružnice se nalazi na presjeku normale na datu pravu u datoj tački i kružnice k(A, r).

2.6. Analiza: Na jednom kraku ugla uzeti ma koju tačku M i kroz nju povući normalu n na izabrani krak ugla. Neka je N tačka na toj normali tako da je MN=r. Paralela kroz N sa odabranim krakom ugla siječe simetralu ugla u središtu tražene kružnice (Sl.2.1).

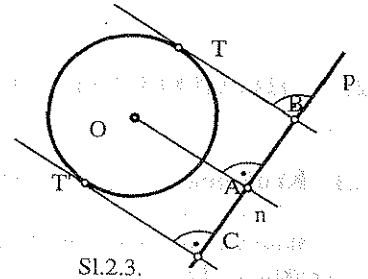


2.7. Uputa: Ako su date kružnice k(A, R) i k(B, R'), središte tražene kružnice nalazi se na presjeku kružnica k(A, R+r) i k(B, R'+r).

2.8. Analiza: Neka prava n sadrži središte O date kružnice i neka je normalna na datu pravu p. Označimo presječnu tačku prave n i kružnice k sa A (odnosno A'). U tački A konstruišimo pravu t koja je normalna na pravu n. Prava t je tražena tangenta.



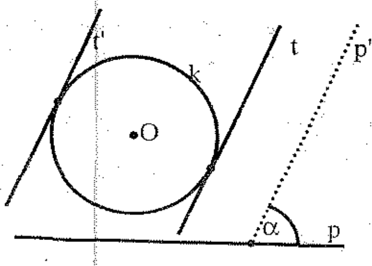
Sl.2.2.



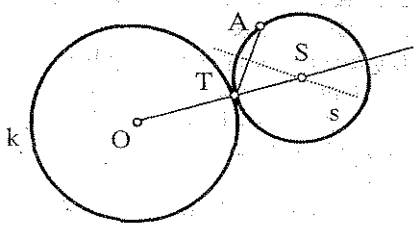
Sl.2.3.

2.9. Analiza: Neka je n normala na datu pravu koja sadrži središte O date kružnice. Neka je tačka A presjek pravih n i p. Na pravoj p odredimo tačke B i C tako da bude AB=AC=R. Normale u tačkama B i C na datu pravu p su tražene tangente kružnice (Sl.2.3).

2.10.



Sl.2.4.

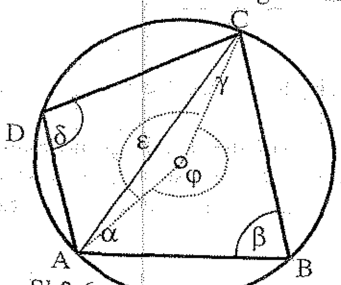


Sl.2.5.

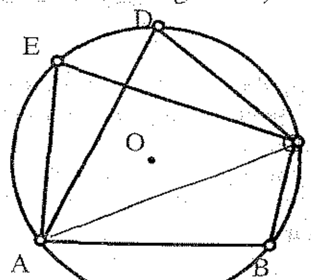
2.11. Analiza: Središte tražene kružnice nalazi se na presjeku simetrale duži AT i prave OT (Sl.2.5.).

2.12. Četverougao čije su stranice tetive iste kružnice naziva se **tetivni četverougao.** Ovaj četverougao možemo definisati i ovako: Četverougao oko koga se može opisati kružnica naziva se tetivni četevrougao.

2.13. Neka je četverougao ABCD tetivni (Sl.2.6.). Povucimo dijagonalu AC i posmatrajmo centralne uglove AOC (jedan ima luk ABC, a drugi ADC).



Sl.2.6.



Sl.2.7.

Uglovi β i ε su periferijski i centralni ugao nad tetivom AC, pa je $\varepsilon=2\beta$. Isto tako su δ i φ periferijski i odgovarajući centralni ugao nad istom tetivom, pa vrijedi $\varphi=2\delta$.

Otuda je: $\varphi+\varepsilon=2\delta+2\beta=2(\delta+\beta)$ $\Rightarrow$ $360^0=2(\delta+\beta)$

$\Rightarrow$ $\delta+\beta=\mathbf{180^0}$.

Kako je zbir uglova četverougla 360^0, to vrijedi:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0 \quad \Rightarrow \quad \alpha+\gamma+180^0=360^0 \quad \Rightarrow \quad \alpha+\gamma=\mathbf{180^0}.$$

Dakle, dokazali smo da su suprotni uglovi tetivnog četverougla suplementni.

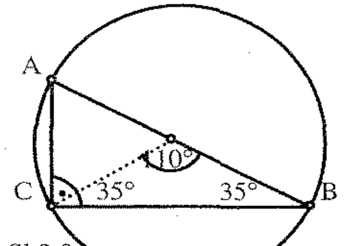
2.14. Neka su suprotni uglovi četverougla ABCD suplementni (Sl.2.7.), tj. neka vrijedi $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$ $(=180^0)$. Tačke A, B i C određuju kružnicu k. Neka je E tačka na kružnici k van luka ABC. Tada je četverougao ABCE tetivni, pa su mu uglovi suplementni (preme prethodnom zadatku), odnosno, vrijedi:

$$\angle A+\angle C=\angle B+\angle E \ (=180^0).$$

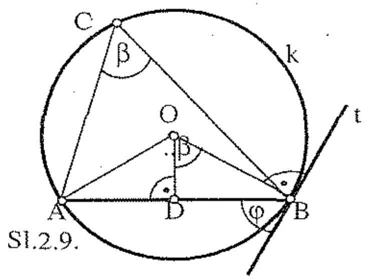
Kako je po pretpostavci $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$, zaključujemo da mora biti $\angle E=\angle D$. Odavde slijedi da je tačka D na kružnici k, jer za sve tačke izvan kružnice ugao nad tetivom AC je manji, a za tačke unutar kružnice je veći od periferijskog ugla nad tom tetivom.

2.15. Kako su kod trapeza uglovi uz krake uvijek suplementni, a kod jednakokrakog trapeza su uglovi na svakoj osnovici jednaki, to su suprotni uglovi jednakokrakog trapeza suplementni. (Nacrtaj sliku!) Ovo znači da je jednakokraki trapez tetivni četverougao.

2.16. Iz središta kružnice (središte hipotenuze) katete se vide pod uglom 110°, odnosno 70° (Sl.2.8.).



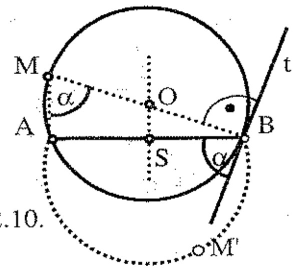
Sl.2.8.



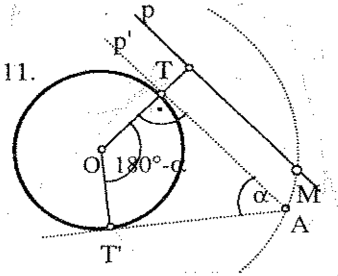
Sl.2.9.

2.17. Neka je AB tetiva kružnice k(O, r) i neka je u tački B povučena tangenta t na ovu kružnicu (Sl.2.9.). Ugao između tetive i tangente označimo sa φ. Neka je C ma koja tačka na luku kružnice koji ne pripada uglu φ. Periferijski ugao ACB označimo sa β. Kako je periferijski ugao dva puta manji od centralnog ugla nad istim lukom ($\angle AOB=2\beta$), to je ugao BOD $=\beta$. Kako su uglovi $\angle BOD=\beta$ i φ uglovi sa normalnim kracima, to je $\varphi=\beta$.

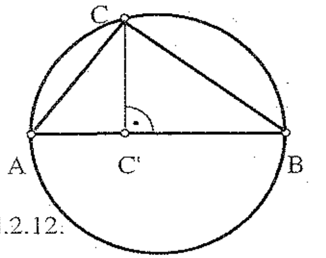
2.18. Analiza: Traženi skup tačaka je kružni luk AMB zajedno sa kružnim lukom AM'B (S.2.10.). Ovdje se koristi teorema o uglu između tetive i tangente.



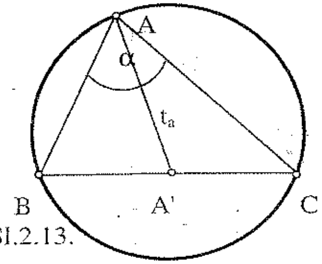
Sl.2.10.

Sl.2.11.


2.19. Neka normala iz središta O na datu pravu p siječe kružnicu u T. Odredimo ugao $<TOT'=\alpha$ i konstruišimo četverougao OTT'A. Data kružnica se vidi pod datim uglom iz tačke A i svih tačaka kružnice središta O i radijusa OA. Tražena tačka M (i M') je na presjeku ove kružnice i date prave p (Sl.2.11.).
2.20. Analiza: Neka je AB hipotenuza traženog trougla i tačka C' na njoj tako da je AC' jednako datoj projekciji katete na hipotenuzu (Sl.2.12.). Vrh C traženog trougla nalazi se na presjeku normale na AB u tački C' i kružnice nad prečnikom AB.

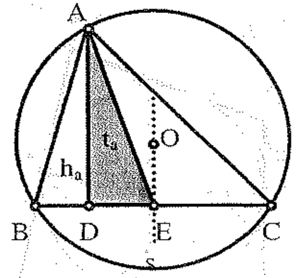


Sl.2.12.

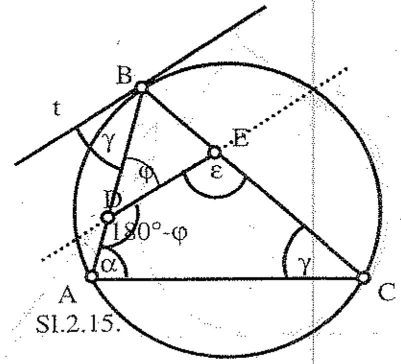


Sl.2.13.

2.21. Uputa: Vidi prethodni zadatak.
2.22. Analiza: Neka je duž AB jednaka datoj duži a. Treba konstruisati skup tačaka iz kojih se duž BC vidi pod datim uglom α (Vidi zadatak 2.17.). Vrh A traženog trougla nalazi se na presjeku tog skupa tačaka i kružnice radijusa t_a čiji je centar A' u središtu duži BC (Sl.2.13.).
2.23. Uputa: Vidi prethodni zadatak.
2.24. Analiza: Pretpostavimo da je zadatak riješen i da je traženi trougao predstavljen na Sl.2.14.
Pravougli trougao ADE se može konstruisati. Tačka E je središte stranice BC, pa je središte opisane kružnice na pravoj s koja sadrži tačku E i normalna je na duž DE. Kako je poznat i radijus R opisane kružnice, to se centar O ove kružnice nalazi i na kružnici k(A, R). Dakle $O \in k(A, R) \cap s$. Vrhovi B i C traženog trougla nalaze se na presjeku prave DE i kružnice k(O, R).



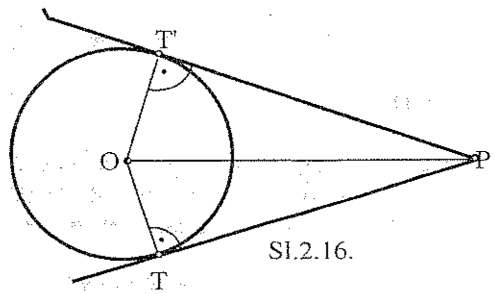
Sl.2.14.



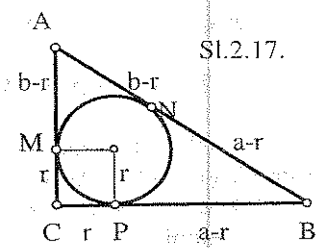
Sl.2.15.

2.25. Neka je dati trougao ABC sa datim odnosima predstavljen na Sl.2.15. Kako je ugao Abt jednak uglu ACB (=γ), (ugao između tetive i tangente jednak je periferijskom uglu nad tom tetivom), to je $<C + <D = 180°$, pa su suprotni uglovi četverougla ACED suplementni, što znači da je taj četverougao tetivni.

2.26. Četverougao čije su sve stranice dijelovi tangenata iste kružnice naziva se **tangentni četverougao**. Drugim riječima, četverougao u koji se može upisati kružnica naziva se tangentni četverougao.
2.27. Ako tačkom A povučemo tangentu t na kružnicu k, onda duž čiji su krajevi tačka A i dodirna tačka tangente t nazivamo **tangentna duž tačke A u odnosu na kružnicu k** (ili kraće, tangentna duž tačke A).
2.28. Neka su PT i PT' tangentne duži tačke P u odnosu na kružnicu k(S, R). Kako je OT=OT' (=R) i <OTP = <OT'P (=90°), to su trouglovi ΔOTP i ΔOT'P podudarni. Otuda je PT=PT' (Sl.2.16.).



Sl.2.16.

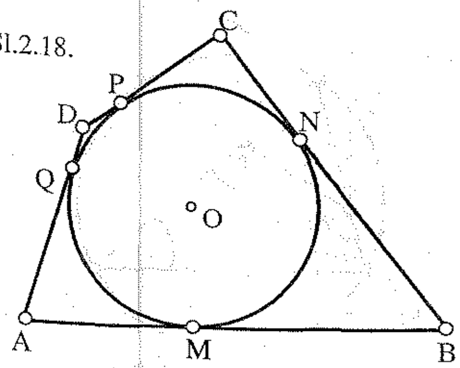
Sl.2.17.


2.29. Koristeći teoremu o tangentnim dužima i oznake sa Sl.2.17. dobije se

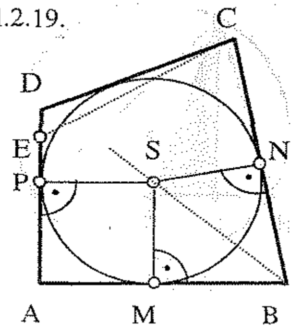
$$AB = AN + BN \Rightarrow c = b\text{-}r + a\text{-}r \Rightarrow 2r = a+b-c \Rightarrow r = \frac{a+b-c}{2}.$$

2.30. Neka je ABCD tangentni četverougao. Posmatrajmo dodirne tačke stranica ovog četverougla i upisane kružnice. Neka su to tačke M, N, P i Q. Koristeći teoremu o tangentnim dužima, zaključujemo da su sljedeće duži jednake:

Sl.2.18.



Sl.2.19.



AM=AQ, MB=BN, NC=CP, DP=DQ.
Otuda je

AB + CD = AM + MB + CP + DP = AQ + BN + NC + QD = **BC + AD**.

2.31. Neka za četverougao ABCD vrijedi : AB + CD = BC + AD (Sl.2.19.). Odredimo presjek simetrala Ax i By uglova <A i <B četverougla ABCD. Neka je presjek ovih simetrala tačka S. Neka su tačke M, N i P, redom, na stranicama četverougla AB, BC i AD tako da je SM⊥AB, SN⊥BC i SP⊥AD. Tada je SM=SN=SP (tačke simetrale ugla jednako su udaljene od njegovih krakova), pa kružnica k(S, SM) dodiruje tri stranice datog četverougla ABCD. Treba dokazati da ova kružnica dodiruje i pravu CD (četvrtu stranicu). Ako kružnica k(S, SM) ne bi dodirivala stranicu CD, tada bi se tačkom C mogla povući tangenta CE na ovu kružnicu, pri čemu se tačka E nalazi na pravoj AD. Tako bi dobili tangentni četverougao ABCE , za koji vrijedi:

AB + CE = BC + AE.

Koristeći pretpostavku AB+CD = BC+AD i gornji zaključak, oduzimanjem, dobije se:

CD – CE = AD – AE => CD – CE = DE .

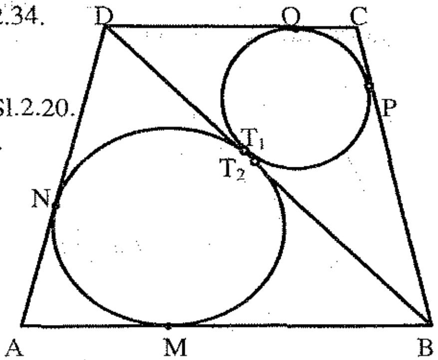
Kako su CD, CE i DE stranice trougla CDE, to je posljednja jednakost nemoguća (svaka stranica trougla veća je od razlike drugih dviju stranica), što znači da ΔCDE ne postoji, odnosno, tačka E se mora poklopiti sa tačkom D. Znači četverougao ABCD je tangentni.

2.32. Kako su sve stranice kvadrata jednake, to je tvrdnja teoreme očita (Vidi dva prethodna zadatka).

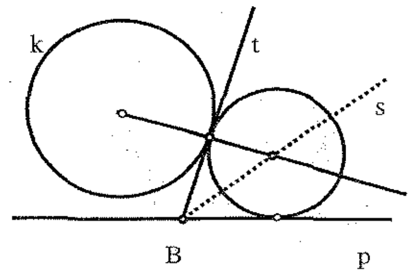
2.33. Kako deltoid ima dva para jednakih susjednih stranica, to je zbir dviju suprotnih stranica jednak zbiru drugih dviju stranica, pa je deltoid tangentni četverougao.

2.34.

Sl.2.20.



Sl.2.21.



Neka su M, N i T_1 dodirne tačke kržnice upisane u trougao ABD, a P, Q i T_2, dodirne tačke kružnice upisane u trougao BCD (Sl.2.20.). Kako je četverougao ABCD tangentni, to vrijedi:

AB + CD = BC + AD.

Prema teoremi o tangentnim dužima, vrijede jednakosti:

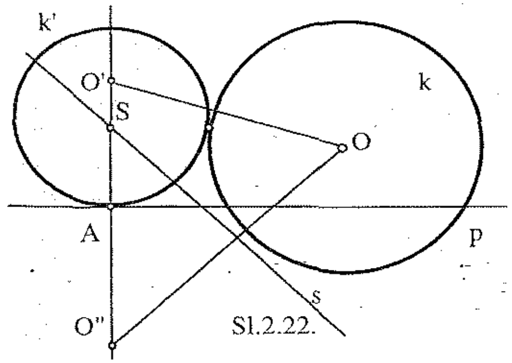
$MB = BT_2$, $BP = BT_1$. $DT = DT_1$, $DN = DT_2$, AM=AN i PC=CQ.

Koristeći navedene jednakosti, dobije se:

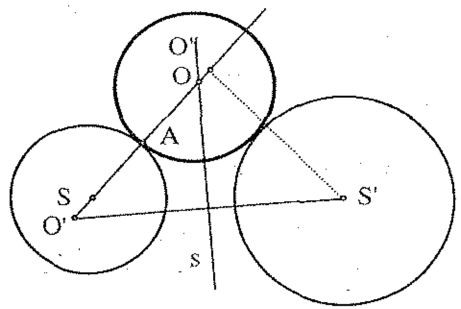
$$AB + CD = BC + AD.$$
$$AM + MB + CQ + QD = BP + PC + DN + AN$$
$$AM + BT_2 + CQ + QD = BT_1 + PC + DN + AN$$
$$AM + (BD\text{-}DT_2) + CQ + QD = (BD\text{-}DT_1) + PC + DN + AN$$
$$-DT_2 + DT_1 = -DT_1 + DT_2$$
$$2DT_1 = 2DT_2 \quad => \quad DT_1 = DT_2 \quad => \quad T_1 \equiv T_2 .$$

2.35. Uputa: Neka je središte date kružnice tačka O i neka je data prava p. Tačkom A povucimo tangentu t na datu kružnicu. Neka je B presječna tačka prave p i tangente t. Središte S tražene kružnice nalazi se u presjeku prave OA i simetrale ugla tBp (Sl.2.21.).

2.36. Analiza: U datoj tački A povući normalu n na datu pravu p. Na ovoj normali odrediti tačke O' i O" tako da bude AO' = AO" = r (gdje je r radijus date kružnice). Središte tražene kružnice nalazi se na presjeku simetrale duži OO' (odnosno OO") i normale n (Sl.2.22).

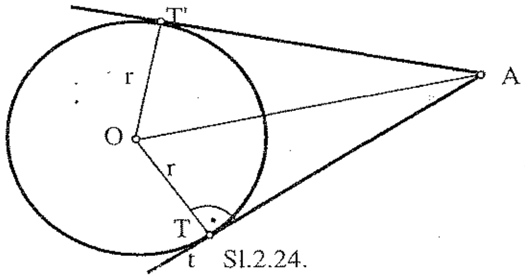


Sl.2.22.

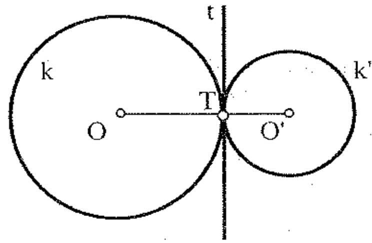


Sl.2.23.

2.37. Analiza: Neka su k(S, R) i k(S', R') date kružnice i tačka A neka pripada prvoj kružnici. Na pravoj SA odrediti tačke O' i O" tako da bude AO' = AO" = R' (gdje je R' radijus druge kružnice). Središte tražene kružnice nalazi se na presjeku simetrale duži O'S' (odnosno O"S') i prave OA (Sl.2.23.).
2.38. Analiza: Neka je prava t koja sadrži tačku A tangenta date kružnice. Ako je T dodirna tačka ove tangente, tada je trougao AOT pravougli sa hipotenuzom AO. Kako su tačke A i O date, a tačka T pripada kružnici prečnika AO, to se tačka T može odrediti kao presjek date kružnice i kružnice nad prečnikom AO.



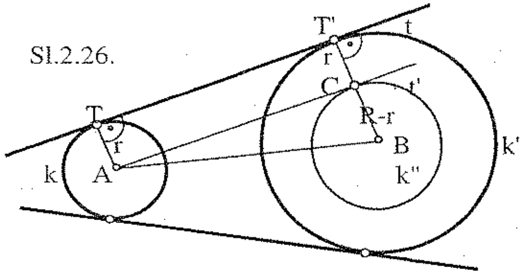
Sl.2.24.

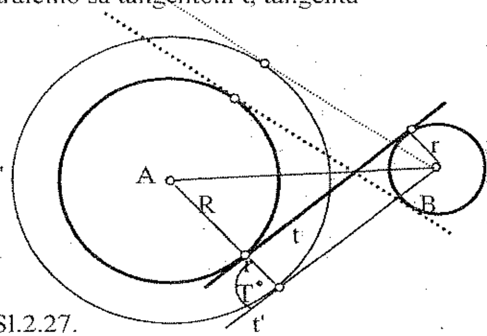


Sl.2.25.

2.39. Dvije kružnice imaju najviše četiri zajedničke tangente (dvije vanjske i dvije unutrašnje) i to onda kada je njihovo centralno rastojanje veće od zbira radijusa. Dvije kružnice imaju samo jednu zajedničku tangentu kada se dodiruju iznutra.
2.40. Neka se kružnice k(O, R) i k(O', r) dodiruju izvana u tački T (Sl.2.25.). Normala u tački T na duž OO' je jedina zajednička unutrašnja tangenta ovih kružnica.
2.41. Ako je jedna kružnica u unutrašnjoj oblasti druge kružnice, tada ove kružnice nemaju zajedničkih tangenti.
2.42. Analiza: Ako je t zajednička vanjska tangenta datih kružnica k i k', tada je prava t' koja prolazi središtem kružnice k paralelno sa tangentom t, tangenta

Sl.2.26.

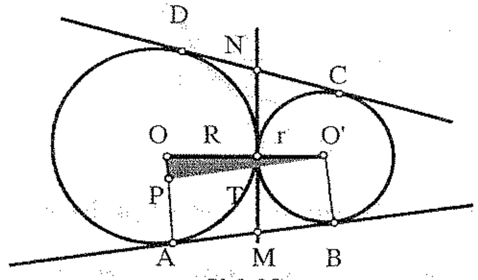




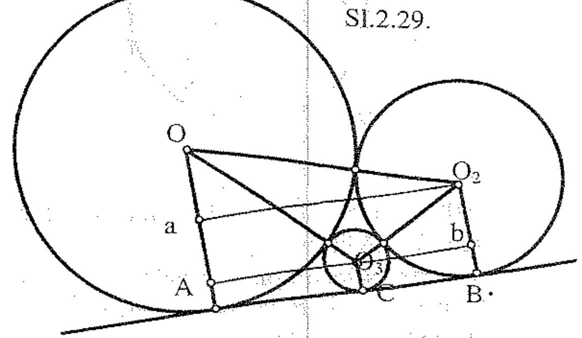
Sl.2.27.

kružnice k"(B, R-r). Kako se kružnica k" i njena tangenta t' mogu konstruisati (Vidi zadatak 2.38.), može se odrediti i njena dodirna tačka C. Dodirna tačka T tražene

tangente t dobije se na presjeku poluprave BC i kružnice k'. Prava koja prolazi kroz tačku T normalno na BT je tražena tangenta (Sl.2.26.).
Koliko u ovom slučaju kružnice imaju zajedničkih vanjskih tangenti?
Izvedi konstrukciju i dokaz.
2.43. Uputa: Tangenta t' iz tačke B na kružnicu k(A, R+r) paralelna je sa traženom zajedničkom unutrašnjom tangentom datih kružnica i od nje udaljena za r (Sl.2.27.).
2.44. Uputa: Četverougao AOBO' je deltoid. Dijagonale deltoida su normalne.
2.45.



Sl.2.28.



Neka je T dodirna tačka datih kružnica. Neka su A i B dodirne tačke jedna vanjske tangente i datih kružnica i neka unutrašnja tangenta siječe vanjske u tačkama M i N. Nije teško zaključiti da je T središte duži MN (MT=TN).
Prema teoremi o tangentnim dužima, vrijede jednakosti:

$$AM = MT, \ BM = MT.$$

Otuda je $MN = 2MT = AM + BM = AB$.
Neka prava koja prolazi tačkom O' siječe polupravu OA u tački P. Tada je trougao OO'P pravougli sa hipotenuzom OO'(=R+r) i katetama PO'=AB i OP (=R-r), pa prema Pitagorinoj teoremi vrijedi:

$$\overline{\mathbf{PO'}}^2 = \overline{\mathbf{OO'}}^2 - \overline{\mathbf{PO}}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{AB'}}^2 = (\mathbf{R}+\mathbf{r})^2 - (\mathbf{R}-\mathbf{r})^2$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\mathbf{AB'}}^2 = 4\mathbf{Rr} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{AB'}} = 2\sqrt{\mathbf{Rr}}.$$

2.46. Prema prethodnom zadatku i oznakama na Sl.2.29. vrijedi:

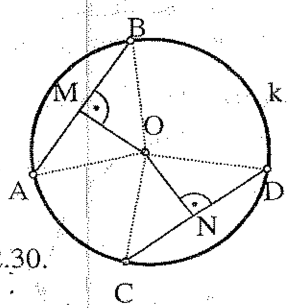
$$\overline{\mathbf{AB}} = 2\sqrt{ab}, \quad \overline{\mathbf{AC}} = 2\sqrt{\mathbf{ac}}, \quad \overline{\mathbf{BC}} = 2\sqrt{\mathbf{bc}},$$

a kako je AB = AC + BC, to je:

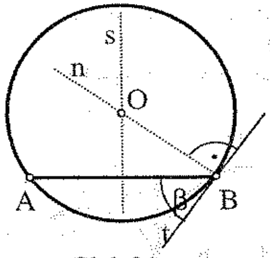
$$2\sqrt{\mathbf{ab}} = 2\sqrt{\mathbf{ac}} + 2\sqrt{\mathbf{bc}}, \text{ odnosno, } \frac{\sqrt{\mathbf{ab}}}{\sqrt{\mathbf{abc}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{ac}}}{\sqrt{\mathbf{abc}}} + \frac{\sqrt{\mathbf{bc}}}{\sqrt{\mathbf{abc}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

2.47. Neka su AB i CD dvije jednake tetive kružnice k(O, R).

Tada su trouglovi ΔAOB i ΔCOD podudarni (Zašto?).
Centralna rastojanja OM i ON posmatranih tetiva su jednaka jer su odgovarajuće visine podudarnih trouglova (Sl.2.30.).



Sl.2.30.



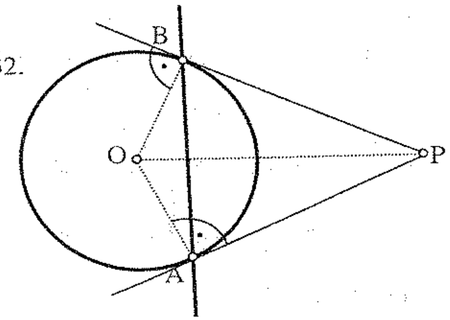
Sl.2.31.

2.48. Analiza: U jednoj krajnjoj tački date duži AB konstruisati ugao jednak datom uglu β ($\angle ABt=\beta$).
Središte tražene kružnice nalazi se na presjeku simetrale date duži AB (tetive) i normale u tački B na pravu t (tangentu). U dokazu se koristi teorema o uglu između tangente i tetive (Sl.2.31.).
2.49. Analiza: Datu duž AB uzeti kao tetivu i konstruisati kružnicu iz koje se ta tetiva vidi pod datim uglom α (Vidi prethodni zadatak). Vrh A traženog trougla je na presjeku simetrale tetive AB i dobijene pomoćne kružnice.

2.50. Uputa: Zadatak se rješava analogno prethodnom.

2.51. Uputa: Tačkom P konstruisati tangente na datu kružnicu. Ako su A i B dodirne tačke tangenata, tada je prava AB tražena polara (Sl.2.32).

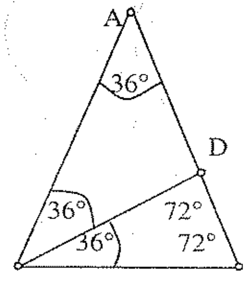
Sl.2.32.



2.52. Uputa: Vidi prethodni zadatak!

2.2. Mjerenje duži. Mjera duži. Zajednička mjera (ZM) i najveća zajednička mjera (NZM) dvije duži. Samjerljive i nesamjerljive duži

2.53.a) Najveća zajednička mjera datih duži je jedinična duž: NZM(2, 5)=1
b) NZM(4, 6)=2 c) NZM(10, 15)=5
2.54.a) NZM(16, 24)=8 b) NZM(13, 39)=13 c) NZM(110, 60)=10
2.55. Neka je ΔABC jednakokraki sa osnovicom BC i uglom pri vrhu A od 36° (Vidi Sl.2.33.). Uglovi na osnovici ovog trougla su po 72° (Zašto?). Ako povučemo simetralu BD ugla ABC dobićemo dva nova jednakokraka trougla i to : ΔABD i ΔBCD. Otuda je $\overline{AB}=\overline{BD}=\overline{BC}$[1]. Mjereći krak AC osnovicom BC nanosimo osnovicu BC na krak AC. Osnovica BC se u AC sadrži jedanput i dobije se ostatak DC. Kako je DC osnovica jednakokrakog ΔBCD, koji ima pri vrhu ugao od 36°, to je CD<BC. Po postupku mjerenja, sada treba CD nanijeti na duž BC. Kako je ΔBCD jednakokraki sa uglom pri vrhu od 36°, došli smo u situaciju kada krak jednakokrakog trougla, koji ima ugao pri vrhu od 36°, mjerimo njegovom osnovicom. Ovo, dalje, znači da se ovaj postupak neće nikada završiti.
Dakle, osnovica i krak jednakokrakog trougla koji ima pri vrhu ugao od 36° su dvije nesamjerljive duži.



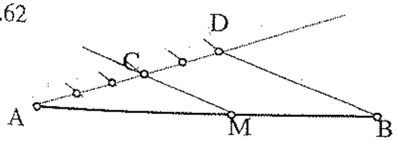
B Sl.2.33. C

2.3. Proporcionalnost duži, geometrijska proporcija, geometrijska sredina dviju duži, produžena proporcija. Talesova teorema

2.56.a) $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ b) $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{5}$ c) $\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}=\frac{4}{5}$ d) $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=5$
2.57.a) DA b) DA c) NE d) NE
2.58. Hipotenuza ovog trougla je dva puta veća od navedene katete (Zašto?). Traženi odnos je 1:2
2.59. Kako težište trougla dijeli svaku težišnicu u odnosu 2:1 , to je traženi odnos 3:2.
2.60. Traženi odnos je 1:2.
2.61. Ako je odnos dvije duži jednak odnosu druge dvije duži, tada kažemo da su te četiri duži proporcionalne. Na primjer, ako je $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, kažemo da su a, b, c i d četiri proporcionalne duži (Sl.2.34.).

[1] Oznaka $\overline{AB}$ predstavlja dužinu duži AB, što, ponekad, označavamo i sa d(AB).

2.62



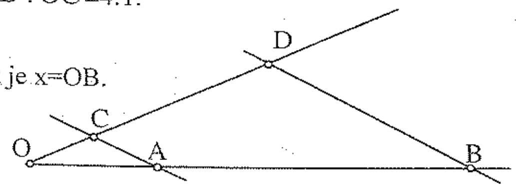
$\overline{AC}=3$ cm, $\overline{CD}=2$ cm, BD|| CM,
$\overline{AM}:\overline{MB}=\overline{AC}:\overline{CD}=3:2$.
Tačka M dijeli duž AB u odnosu 3:2.

2.63.a) Odaberimo ma koju tačku O i poluprave Ox i Oy. Na polupravoj Oy odredimo tačke C i D tako da bude $\overline{OD}=4$ cm i $\overline{OC}=1$ cm, a na polupravoj Ox odredimo tačku A tako da je $\overline{OA}=2$ cm. Tačkom D povucimo paralelu DB sa pravom CA. Sada vrijedi:

$\overline{OB}:\overline{OA}=\overline{OD}:\overline{OC}=4:1$.

$\overline{OD}=4$
$\overline{OC}=1$
$\overline{OA}=2$
$\overline{OB}=x$

Tražena duž je x=OB.



Sl.2.35

Na analogan način se mogu odrediti i duži u zadacima b), c) i d).

2.64. Uputa: Date proporcije se mogu transformisati.

a) $(5-x):x=7:5 \Leftrightarrow 7x=5(5-x) \Leftrightarrow 7x=25-5x \Leftrightarrow 12x=25 \Leftrightarrow x:5=5:12$.
Dalje se konstrukcija može izvesti kao u zadatku 2.11.a).

b) $(10-x):x=20:10 \Leftrightarrow 100-10x=20x \Leftrightarrow 30x=100 \Leftrightarrow 3x=10 \Leftrightarrow x:2=5:3$

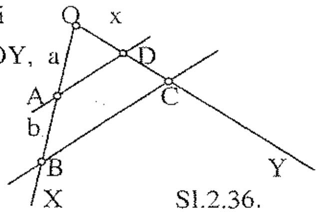
c) $(2+x):x=8:2 \Leftrightarrow 4+2x=8x \Leftrightarrow 6x=4 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x:2=1:3$.

2.65. Zadatak se može riješiti i na slijedeći način: Data proporcija se može napisati u obliku x:a=a:(a+b). Posmatraju se ma koje poluprave OX i OY.

Na polupravoj OX odredi se tačka A, tako da je $\overline{OA}=a$ i tačka B tako da bude $\overline{OB}=a+b$. Na drugoj popupravoj OY, odredi se tačka C, tako da je $\overline{OC}=a$. Tačkom A povuče se paralela AD sa pravom BC. Dalje je,

$\overline{OD}:\overline{OC}=\overline{OA}:\overline{OB}$, odnosno, OD:a=a:(a+b).

Tražena duž je x=OD.



Sl.2.36.

Na analogan način možemo odrediti i duži u zadacima b) i c).

2.66.a) $x:a=b:c \Leftrightarrow x=\dfrac{ab}{c}=\dfrac{3}{10}$ b) $x=\dfrac{16}{5}$ c) $x=\dfrac{8}{5}$

2.67. $\dfrac{ac+c^2}{bd+d^2}=\dfrac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow (ac+c^2)b^2=(bd+d^2)a^2$

$\Leftrightarrow ab^2c+b^2c^2=a^2bd+a^2d^2 \Leftrightarrow (ab)(bc)+b^2c^2=a^2bd+a^2d^2$

$\Leftrightarrow a^2bd+b^2c^2=a^2bd+a^2d^2 \Leftrightarrow b^2c^2=a^2d^2 \Leftrightarrow bc=ad \Leftrightarrow a:b=c:d$.

2.68. Geometrijska sredina dviju datih duži (čije su dužine a i b) je duž (čija je dužina G) za koju vrijedi proporcija a : G = G : b.

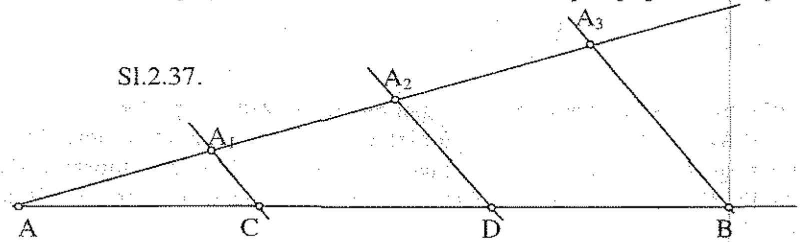
a) $G^2=ab=9 \Rightarrow G=3$ b) G=4 c) G=6 d) $G=2\sqrt{2}$.

2.69. Na polupravoj Ax (koja ne sadrži duž AB) treba odabrati tačke A_1, A_2, A_3 tako da vrijedi: $\overline{AA_1}=\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}$, (Tačku A_1 odaberemo proizvoljno!). Tačke A_3 i B određuju jednu pravu. Pralelno sa ovom pravom, kroz tačke A_1 i A_2 povucimo prave. Ove prave sijeku duž AB redom, u tačkama C i D i vrijedi:

$$\overline{AC}:\overline{CD}:\overline{DB}=\overline{AA_1}:\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}.$$

Kako su, po konstrukciji, duži AA_1, A_1A_2 i A_2A_3 jednake, to su jednake i duži AC, CD i DB, pa je data duž AB tačkama C i D podijeljena na tri jednake duži.

Sl.2.37.



2.70. Zadatak rješavamo analogno prethodnom zadatku.

2.71. Vidi zadatak 2.69.

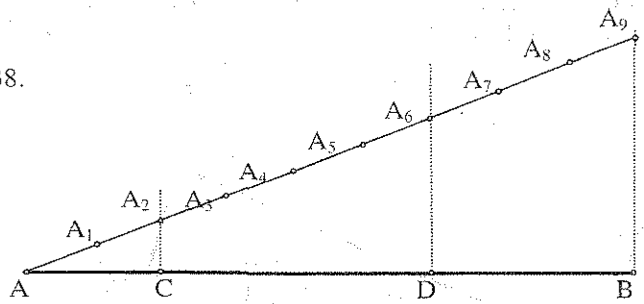
2.72.a) Iz kraja A date duži povučemo ma koju polupravu (koja ne sadrži tačku B), i na njoj odredimo 9, (1+4+3=9), tačaka: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 i A_9, tako da je

$$\overline{AA_1}=\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}=\overline{A_4A_5}=\overline{A_5A_6}=\overline{A_6A_7}=\overline{A_7A_8}=\overline{A_8A_9}.$$

Tačkama A_2 i A_6 povučemo paralele sa pravom A_9B. Neka ove paralele, redom, sijeku duž AB u tačkama C i D. Tada vrijedi:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AA_2}}{\overline{A_2A_6}}=\frac{2}{4},\ \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{A_2A_6}}{\overline{A_6A_9}}=\frac{4}{3} \Rightarrow \overline{AC}:\overline{CD}:\overline{DB}=2:4:5.$$

Sl.2.38.

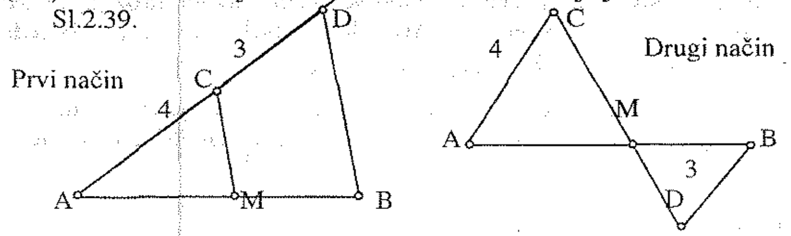


b) c) d) Ove zadatke rješavamo analogno zadatku pod a).

2.73.a) Pokazaćemo, grafički, dva načina rješavanja ovog zadatka. U prvom slučaju se na polupravoj Ax odrede tačke C i D tako da vrijedi d(AC) = 4, d(CD)=3, a zatim povuče paralela CM sa pravom BD. Tačka M na duži AB dijeli datu duž u odnosu 4:3 iznutra. Dokaži! (Sl.2.39.).

U drugom slučaju na paralelnim polupravim suprotnog smijera, od kojih jedna ima početak u tački A, a druga u tački B odredimo tačke C i D tako da vrijedi d(AC)=4, d(BD)=3. Prava CD siječe datu duž AB u tački M koja je tražena tačka. Dokaži!

Sl.2.39.

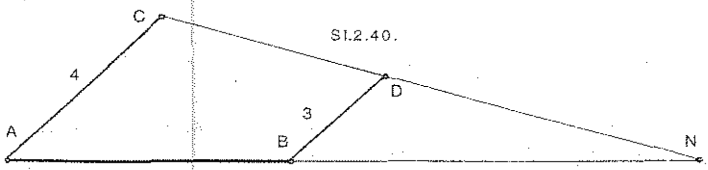


Zadatke b) c) d) rješavamo na analogan način kao zadatak pod a).

2.74.a) Neka je AB data duž. Povucimo paralelne poluprave u istom smijeru Ax i By. Na polupravoj Ax odredimo tačku C tako da je d(AC)=4, a na polupravoj By pronađimo tačku D za koju vrijedi d(BD)=3. Presjek prave CD i prave AB je tražena tačka N.

Zaista, prema Talesovoj teoremi i korištenim oznakama na slici 2.40., vrijedi:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{4}{3}.$$

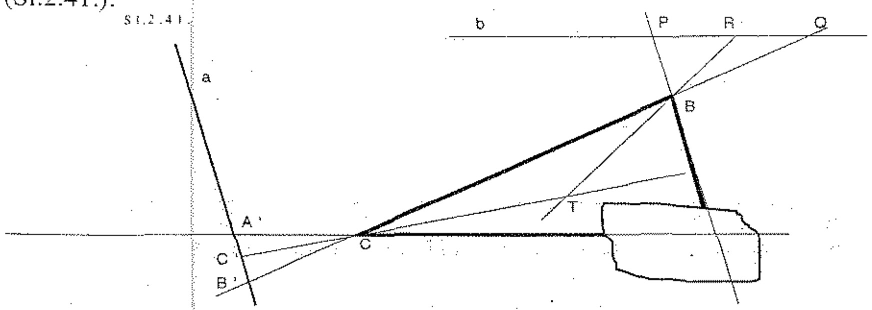


Sl.2.40.

Zadatke b) c) i d) rješavamo analogno zadatku pod a).

2.75. Neka je vrh A datog trougla nepristupačan. Povucimo pravu a paralelno sa pravom AB i presječne tačke ove prave sa pravim BC i AC označimo, redom, sa B' i A'. Neka je C' središte duži B'C'. Tada prava CC' sadrži težišnicu ΔABC (Sl.2.41.).

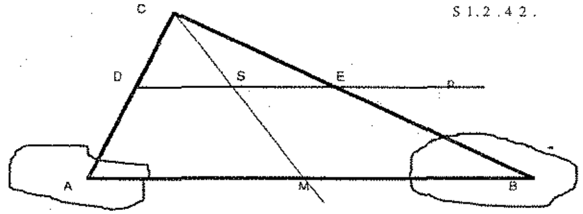
Sl.2.41.



Povucimo pravu b koja je paralelna sa pravom AC. Presječne tačke ove prave sa pravama AB i BC označimo, redom sa P i Q. Neka je R središte duži PQ. Prava BR sadrži težišnicu BB' datog ΔABC. Težište trougla nalazi se na presjeku pravih CC' i BR.

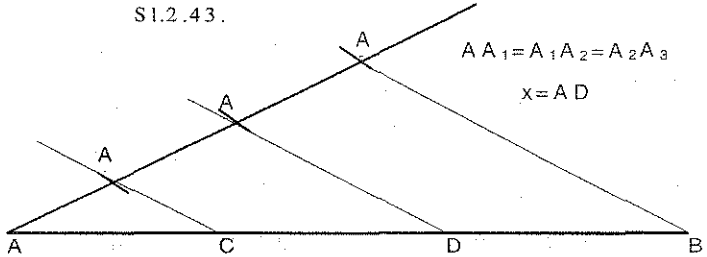
2.76. Neka je ΔABC posmatrani trougao čiji su vrhovi A i B nepristupačni (Sl.2.4.2.). Povucimo pravu p koja je paralelna sa pravom AB. Neka prava p siječe prave AC i BC, redom u tačkama D i E. Neka je S središte duži DE. Prava CS siječe pravu AB u središtu stranice AB. Dokaži!

Sl.2.4.2.



2.77.a) Ako datu duž a=AB tačkama C i D podijelimo na jednake dijelove, tada je x=AD.

Sl.2.43.

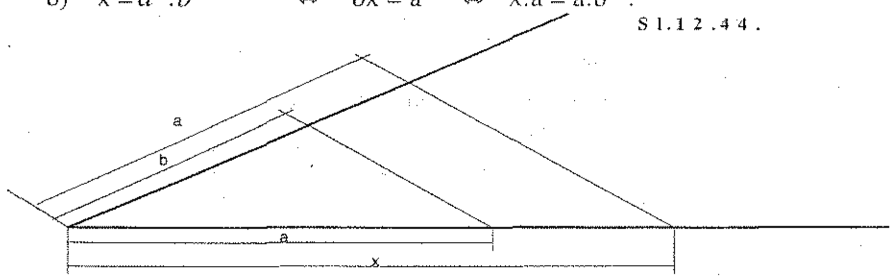


Analogno rješavamo zadatke pod b), c) i d).

2.78.a) Uputa: $x = \frac{a}{b}$ ⇔ bx=a ⇔ x:1 = a:b.

b) $x = a^2 : b$ ⇔ $bx = a^2$ ⇔ x:a = a:b .

Sl.1.2.44.



c) Uputa: x=ab ⇔ x:a=b:1.

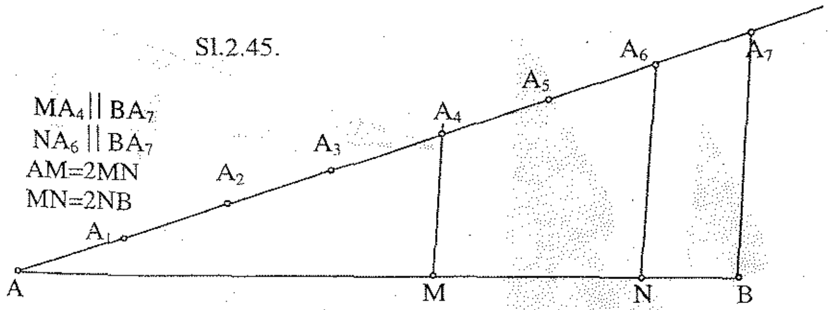
2.79.a) $x=a^2$ ⇔ x:a = a:1 b) $x = b^2$ ⇔ x:b=b:1 c) $x = a : b$ ⇔ x:1=a:b

2.80.a) $x = \frac{ac}{b}$ ⇔ x:a=c:b b) $x = \frac{ab}{c}$ ⇔ x:a=b:c c) $x = \frac{bc}{a}$ ⇔ x:b=c:a

2.81. Uputa: Datu duž AB treba podijeliti na 7 jednakih dijelova. Itd...

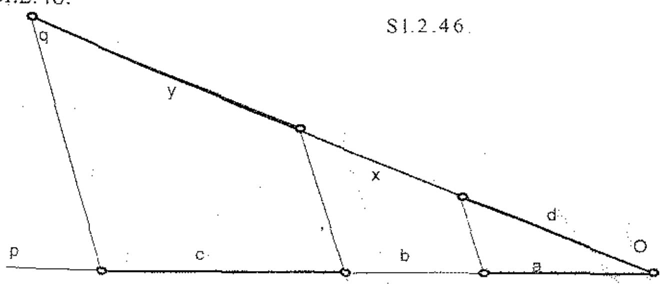
2.82. Neka je Ax ma koja poluprava i neka vrijedi: $d(AA_1)=d(A_1A_2)=d(A_2A_3)=$
$= d(A_3A_4)=d(A_4A_5)=d(A_5A_6)=d(A_6A_7)$.Vidi Sl.2.45.

Sl.2.45.



2.83. Na polupravu Op nanijeti date duži a, b i c, a na polupravu Oq datu duž d. Vidi Sl.2.46.

Sl.2.46.



2.84. Trouglovi ΔOAB i ΔOCD su slični. Zato su odgovarajuće stranice ovih trouglova proporcionalne.

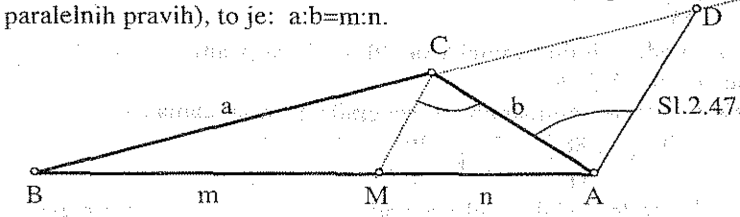
a) $\overline{AC}:\overline{CO}=\overline{BD}:\overline{DO} \Rightarrow \overline{AC}=\dfrac{\overline{CO}\cdot\overline{BD}}{\overline{DO}} \Rightarrow \overline{AC}=\dfrac{10\cdot 7}{14}=5.$

b) $\overline{OC}=4$ c) $\overline{AC}=7$, $\overline{OB}=28$ d) $\overline{OA}=10$

2.85. Na kraku Ox odrediti tačku P tako da je $\overline{OP}=m$, a na kraku Oy tačku Q tako da bude $\overline{OQ}=n$. Prava koja sadrži datu tačku M i koja je paralelna sa pravom PQ siječe krakove datog ugla u traženim tačkama A i B (A je na kraku Ox).

2.4. Osobine simetrala unutrašnjeg i uporednog vanjskog ugla trougla

2.86. Neka je CM simetrala ugla kod vrha C. Neka prava koja sadrži tačku A siječe pravu AC u tački D. Kako je $\overline{BC}:\overline{CD}=\overline{BM}:\overline{MA}$ i ΔACD jednakokraki, AC=CD, (uglovi CAD i ACD su jednaki kao naizmjenični na transverzali dviju paralelnih pravih), to je: a:b=m:n.



Sl.2.47.

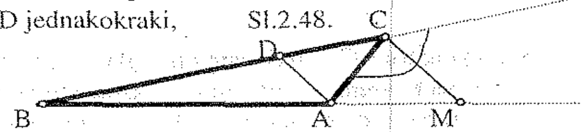
Posmatrajući neku drugu, od preostale dvije simetrale trougla, na analogan način dobivamo da su dvije stranice trougla proporcionalne odgovarajućim odsječcima na trećoj stranici određenim simetralom unutrašnjeg ugla.

Napomena: Vrijedi i obrnuta tvrdnja: Ako je M tačka na stranici AB, ΔABC i ako je $\overline{BC}:\overline{CD}=\overline{BM}:\overline{MA}$, tada je prava CM simetrala unutrašnjeg ugla trougla sa vrhom C. Dokaz ove tvrdnje prepuštamo vama.

2.87. Neka je M tačka presjeka simetrale vanjskog ugla kod vrha C i prave AB. Neka je D tačka presjeka prave koja sadrži tačku A i paralelna je sa simetralom CM, sa pravom BC. Prema teoremi o odnosu odsječaka na pravima pramena presječenim paralelnim transverzalama, vrijedi: $\overline{BC}:\overline{CD}=\overline{BM}:\overline{MA}$.

Nije teško zaključiti da je ΔACD jednakokraki, i da je DC=AC, pa se navedena proporcija svodi na

Sl.2.48.



a:b = $\overline{BM}:\overline{AM}$

Vrijedi i tvrdnja obrnuta dokazanoj. Formulišite tu tvrdnju i pokušajte provesti njen dokaz.

2.88. Neka su m i n odsječci na stranici c. Prema zadatku 2.86. vrijedi: a:b=m:n , odakle se dobije:

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{c-m} \Rightarrow \frac{13}{15}=\frac{m}{4-m} \Rightarrow 13(4-m)=15m \Rightarrow 28m=52 \Rightarrow m=\frac{13}{7}, n=\frac{15}{7}.$$

Odsječci na stranici b su: $\frac{60}{17}$ i $\frac{195}{17}$, a na stranici a su $\frac{52}{19}$ i $\frac{195}{19}$.

2.89. a) $\frac{65}{9}$ i $\frac{70}{9}$; $\frac{195}{29}$ i $\frac{182}{29}$; $\frac{13}{2}$ i $\frac{15}{2}$. b) $\frac{3}{2}$ i $\frac{5}{4}$; $\frac{20}{7}$ i $\frac{15}{7}$; $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{3}$.

c) $\frac{75}{11}$ i $\frac{90}{11}$; $\frac{24}{5}$ i $\frac{36}{5}$; $\frac{40}{9}$ i $\frac{50}{9}$.

2.90. a) $\frac{a}{b}=\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{x}{c+x} \Rightarrow \frac{13}{14}=\frac{x}{15+x} \Rightarrow x=195; m=195, n=15+195=210$

Odsječci koji odgovaraju stranici a su m'=182, n'=195, a stranici b su

$$m''=\frac{91}{2}, n''=\frac{119}{2}.$$

b) $\frac{a}{c}=\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b+n}{n} \Rightarrow \frac{4}{3}=\frac{5+n}{n} \Rightarrow n=15, m=20.$

Odsječci koji odgovaraju stranici a su m'=10, n'=6, a stranici c su m''=12, n''=15.

c) Odsječci koji odgovaraju stranici a su: 40 i 50, za stranicu b su 24 i 36 i za stranicu c su 75 i 90.

2.91. Odsječci koje simetrale unutrašnjih uglova grade na stranicama su :

$$\frac{560}{41} \text{ i } \frac{588}{41};\quad \frac{35}{4} \text{ i } \frac{49}{4};\quad \frac{60}{7} \text{ i } \frac{80}{7}.$$

Odsječci koje simetrale vanjskih uglova grade na stranicama datog trougla su:

60 i 80 ; 560 i 588 ; 52,5 i 73,5.

2.92. Neka je AD simetrala ugla ABC jednakokrakog trougla sa osnovicom BC=a. Tada vrijedi: a:b=m:n => 6:b=3:4 => b=8.

2.93. Koristeći teoremu o simetrali unutrašnjeg ugla trougla dobivamo

$b:c=\overline{MC}:\overline{BM}$, odnosno, $b:c=(a-\overline{BM}):\overline{BM}$ => $b\cdot\overline{BM}=ac-c\cdot\overline{BM}$

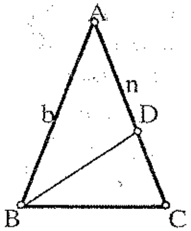
=> $(b+c)\cdot\overline{BM}=ac$ => $\overline{BM}=\frac{ac}{b+c}, \overline{MC}=\frac{ab}{b+c}$.

2.94. Prema teoremi o simetrali vanjskog ugla trougla i datim oznakama vrijedi:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AN}-b} \Rightarrow c(\overline{AN}-b)=a\overline{AN} \Rightarrow \overline{AN}=\frac{bc}{c-a},\quad \overline{NC}=\frac{ab}{c-a}.$$

2.95. Za krak $b=\overline{AC}=\overline{AB}$ datog trougla vrijedi: b=m+n. Prema teoremi o simetrali unutrašnjeg ugla trougla i datim oznakama na slici 2.49., vrijedi: a:b=m:n =>

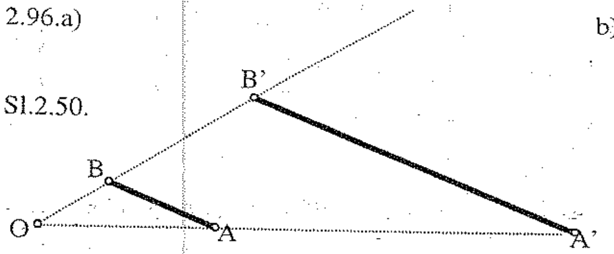
$a:(m+n)=m:n$ => $a=\frac{m(m+n)}{n}$.



Sl.2.49.

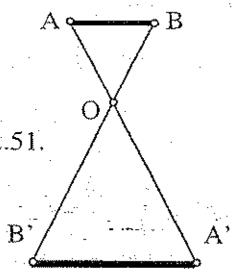
2.5. HOMOTETIJA GEOMETRIJSKIH FIGURA

2.96.a)



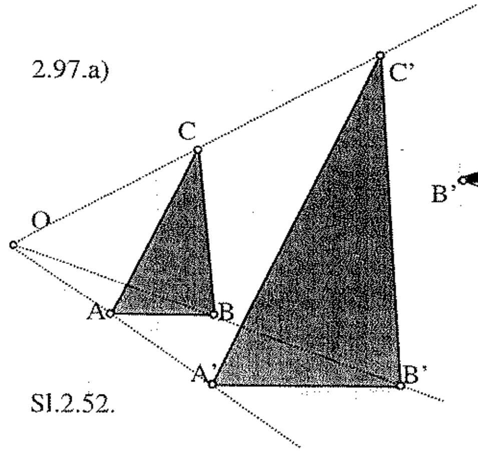
Sl.2.50.

b)



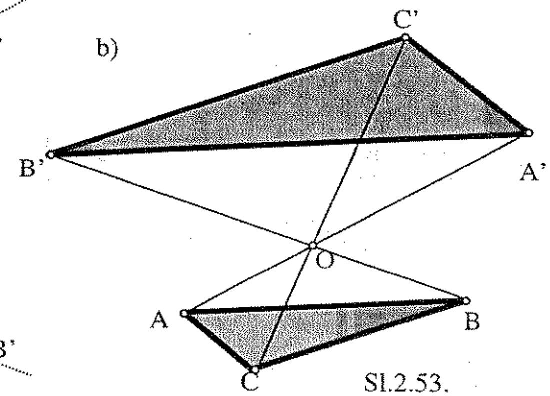
Sl.2.51.

2.97.a)



Sl.2.52.

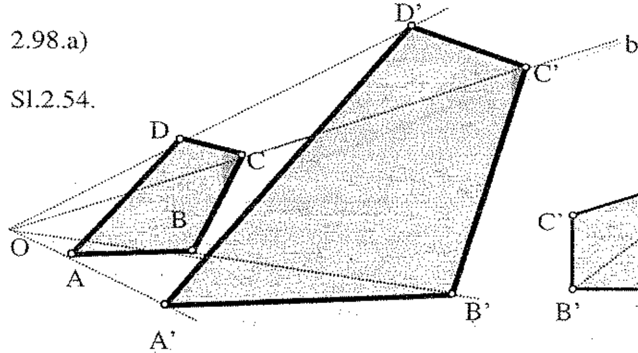
b)



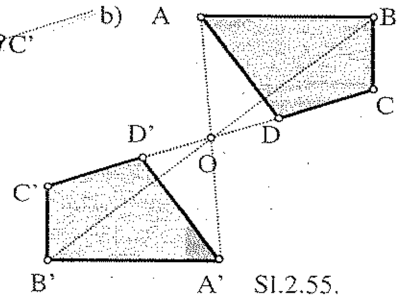
Sl.2.53.

2.98.a)

Sl.2.54.



b)



Sl.2.55.

2.99. Uputa: Za koeficijent homotetije uzeti ma koji pozitivan broj.

2.100. Uputa: Za koeficijent homotetije uzeti ma koji negativan broj.

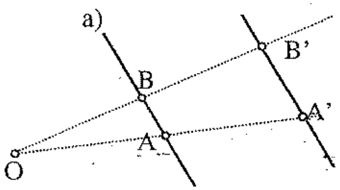
2.101.a) Konstruisati ortocentar H datog trougla (Ortocentar je presjek pravih na kojima su visine trougla), uzeti ga za centar homotetije i birajući koeficijent homotetije k, uzeti obavezno k>0, odrediti homotetičnu sliku datog trougla.

b) Za centar homotetije uzeti S (presjek simetrala stranica trougla) i postupiti kao u ovom zadatku pod a).

c) Ovdje je centar homotetije tačka presjeka simetrala unutrašnjih uglova trougla. Uzimajući ovu tačku za centar homotetije, postupiti kao u zadatku pod a).

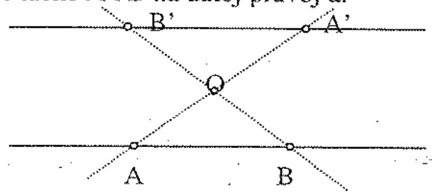
2.102. U svakom zadatku su uzete proizvoljne tačke A i B na datoj pravoj a.

a)



Sl.2.56.

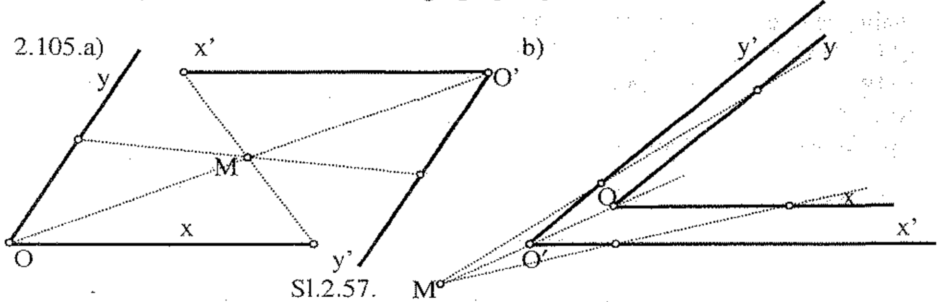
c)



Uočavamo da se uvijek homotetijom prava preslikava u paralelnu pravu.

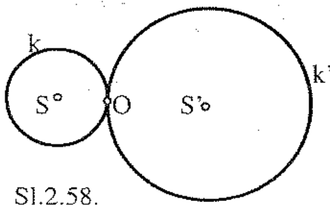
2.103. U svakom slučaju se prava preslikava u samu sebe.
2.104.a) i b) Homotetična slika datog ugla je isti taj ugao.
c) i d) Homotetična slika datog ugla je ugao unakrstan datom uglu.

2.105.a) b)



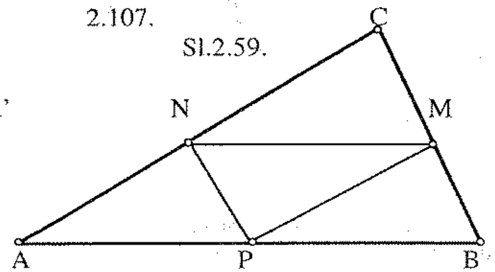
Sl.2.57.

2.106. 2.107.



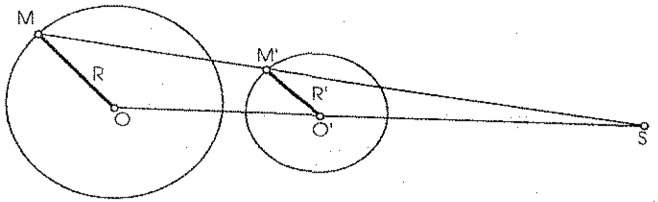
Sl.2.58.

Sl.2.59.



Prema teoremi o srednjoj duži trougla, vrijedi $AB \| MN$, $BC \| NP$, $AC \| MP$ i AB=2MN, BC=2NP, AC=2MP. To znači da su odgovarajuće stranice trouglova ΔABC *i* ΔMNP paralelne i njihov odnos je stalan. To je broj 2.Centar homotetije je težište T ΔABC, a koeficijent je k=-2.

2.108. Svake dvije kružnice su homotetične. Ako su radijusi kružnica različiti, kružnice su homotetične direktno i inverzno. Pokažimo da su dvije kružnice različitih radijusa direktno homotetične. Neka su na slijedećoj slici date kružnice k(O, R) i k(O', R').



Sl.2.60.

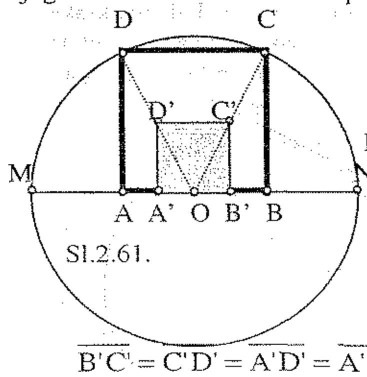
Neka je $\overline{OM}$=R ma koji radijus kružnice k, a $\overline{O'M'}$=R' radijus kružnice k' koji je paralelan sa radijusom OM u istom smijeru. Prema Talesovoj teoremi vrijedi:

$$\frac{\overline{SO}}{\overline{SO'}}=\frac{\overline{SM}}{\overline{SM'}}=\frac{\overline{OM}}{\overline{O'M'}}=\frac{R}{R'} \Rightarrow \overline{SO}=\frac{R}{R'}\cdot\overline{SO'},\quad \overline{SM}=\frac{R}{R'}\cdot\overline{SM'}.$$

Iz gornjih jednakosti se vidi da su O i O' homotetične tačke, što znači da su središta posmatranih kružnica homotetične tačke za koeficijent homotetije k=R/R' i centar S. Isto tako, ma koja tačka M kružnice k homotetična je za istu homotetiju sa tačkom M', kružnice k'. Dakle, dvije kružnice različitih radijusa su homotetične. Centar homotetije dviju kružnica je presjek prave koja prolazi krajevima paralelnih radijusa istog smijera i prave koja sadrži središta kružnica (osa dviju kružnica). Ako kružnice imaju zajedničke vanjske tangente, tada je centar homotetije ovih kružnica presječna tačka tih tangenti.

2.109. Uputa: Tačka presjeka pravih koje su određene odgovarajućim vrhovima ovih trouglova je centar homotetije datih trouglova. Dokazati!

2.110. Neka je MN prečnik kružnice k(O, R). Neka je O središte stranice A'B' ma kojeg kvadrata A'B'C'D'. Poluprava OC' siječe posmatranu kružnicu u tački C koja je vrh traženog kvadrata. Analogno se dobiva vrh D. Vrhovi A i B su normalne projekcije vrhova C i D na prečnik MN.



Sl.2.61.

Dokaz: Kako je CB paralelno sa C'B', to je, prema Talesovoj teoremi,

$\overline{OC}:\overline{OC'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}$,

$\overline{OD}:\overline{OD'}=\overline{AD}:\overline{A'D'}$

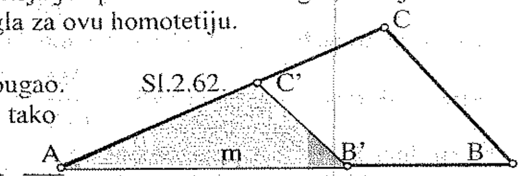
$\overline{OC}:\overline{OC'}=\overline{OD}:\overline{OD'}$,

odakle neposredno zaključujemo, jer je $\overline{B'C'}=\overline{C'D'}=\overline{A'D'}=\overline{A'B'}$, da je : $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}$.

2.111. Analiza: Neka je ΔABC dati trougao i k(O, r) data kružnica. Neka je O' središte opisane kružnice oko datog trougla. Ako odredimo centar homotetije S i koeficijent k date kružnice i kružnice koja je opisana datom trouglu, tada je traženi trougao homotetična slika datog trougla za ovu homotetiju. Konstrukciju provedite sami!

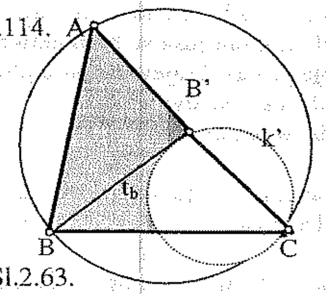
2.112.Analiza: Neka je ΔABC dati trougao. Na polupravoj AB odredimo tačku B' tako da bude $\overline{AB'}$=m. Homotetija sa centrom u A i koeficijentom k = $\overline{OB'}:\overline{OB}$ preslikava dati ΔABC u traženi ΔA'B'C'.

Sl.2.62.



2.113. Analiza: Ako je ΔABC dati trougao,homotetičnim preslikavanjem ovog trougla, uzimajući ma koju tačku O za centar homotetije i koeficijent k=3 (može i k=-3), dobijamo traženi trougao. Dokazati!

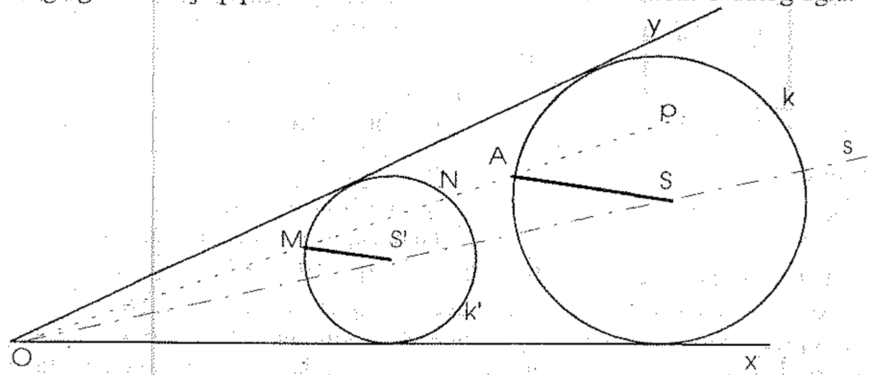
2.114.



Sl.2.63.

Analiza: Neka je duž BC jednaka datoj duži a. Konstruišimo skup tačaka iz kojih se ova duž vidi pod datim uglom. Dobijenu kružnicu k preslikajmo homotetijom $H(C, \frac{1}{2})$ u kružnicu k'. Kružnica $k(B, t_b)$ siječe kružnicu k' u tački B' koja je središte stranice AC traženog trougla. Vrh A trougla dobivamo kao presjek poluprave CB i kružnice k.

2.115. Analiza: Neka je kružnica k(S, R) tražena kružnica koja dodiruje krake datog ugla xOy i sadrži datu tačku A. Centar S ove kružnice pripada simetrali s datog ugla. Neka je p prava određena datom tačkom A i vrhom O datog ugla.



Sl.2.64.

Posmatrajmo tačke S' i M u kojima paralela sa pravom SA siječe prave s i p.

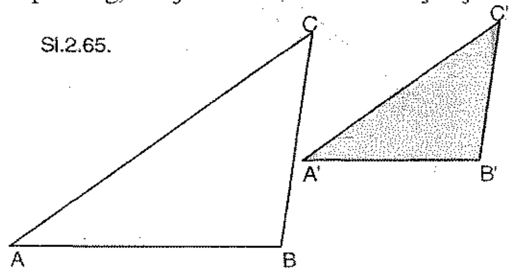
Prema Talesovoj teoremi vrijedi: $\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{S'M}}{\overline{SA}} = k,$

pa su duži S'M i SA homotetične za homotetiju H(O, k). Zato su homotetične i kružnice k(S, R) i k'(S', S'M). Kako prva kružnica dodiruje krakove ugla, to će i druga da ih dodiruje. Sada se uočava postupak konstrukcije tražene kružnice. Konstruiše se ma koja kružnica koja dodiruje krakove ugla, recimo k'(S', r'), odrede se tačke presjeka ove kružnice sa pravom p, recimo M i N, i na presjeku paralele sa S'M (ili S'N) kroz datu tačku A i simetrale s datog ugla nalazi se središte S tražene kružnice. Dalji postupak je očigledan.

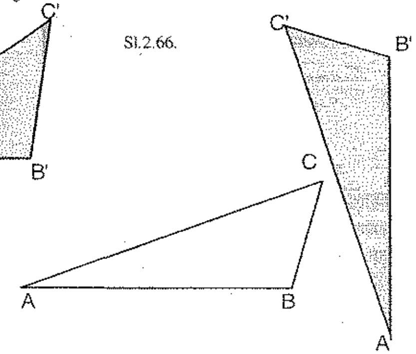
2.6. Sličnost geometrijskih figura

2.116. Nisu slični, jer prvi trougao nema ni jedan ugao od 60°, a slični trouglovi imaju sve odgovarajuće uglove jednake.
2.117. Traženi uglovi su: 75°, 65° i 40°.
2.118. Neka trouglovi ΔABC i ΔA'B'C' imaju paralelne odgovarajuće stranice (Sl.2.65.) Tada su uglovi BAC i B'A'C' uglovi sa paralelnim kracima istog (ili suprotnog) smijera i kao takvi su uvijek jednaki.

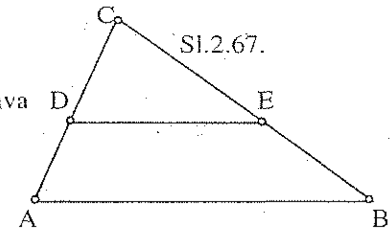
Sl.2.65.



Sl.2.66.



2.119. Kako su uglovi sa normalnim kracima jednaki (ako su oba oštra ili tupa), to se zaključivanjem kao u prethodnom zadatku dokazuje da su dati trouglovi slični (Sl.2.66.).
2.120. Na stranici AC datog trougla uzmimo ma koju tačku D i povucimo paralelu DE sa stranicom AB. Homotetija $H(C, \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}})$ preslikava ΔABC u ΔCDE (Zašto?), pa su ovi trouglovi homotetični. Kako su homotetične figure uvijek i slične, ovim je tvrdnja iskazana u zadatku i dokazana (Sl.2.67.).



Sl.2.67.

2.121. Ako je x dužina dalekovodnog stuba, koristeći osobine sličnih trouglova dobije se:
x:8 = 2:0,4 => 0,4x=16 => x=40m. **2.122.** x=13,875 m
2.123. Odnos rastojanja dviju tačaka na geografskoj karti i rastojanja odgovarajućih mjesta u prirodi jednak je razmjeri karte. Ako su A' i B' tačke na karti koje odgovaraju mjestima A i B tada vrijedi:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{50000} \Rightarrow \overline{A'B'} = \frac{\overline{AB}}{50000} = \frac{10000\,m}{50000} = \frac{100\,cm}{5} = 20\,cm.$$

$\overline{B'C'}$ =30 cm, $\overline{A'C'}$ = 24 cm. **2.124.** $\overline{A'B'}$ = 3750 m
2.125. Srednja duž trougla paralelna je sa odgovarajućom stranicom, pa je ugao CDE jednak uglu CAB (uglovi sa paralelnim kracima istog smijera). Kako trouglovi ΔABC i ΔCDE imaju i jedan zajednički ugao, to su oni slični.

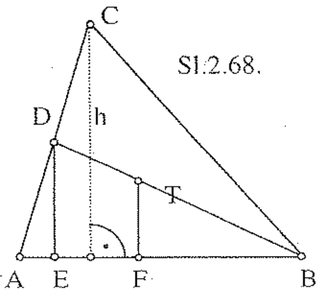
2.126. Neka je ΔABC sličan sa ΔA'B'C'. Neka je CD težišnica ΔABC, a C'D' odgovarajuća težišnica ΔA'B'C'. Tada vrijedi:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} \text{ i } \sphericalangle CAD=\sphericalangle C'A'D',$$

pa su trouglovi ΔACD i ΔA'C'D' slični. Kako su odgovarajuće stranice sličnih trouglova proporcionalne, to vrijedi: $\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}\left(=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}\right)$

čime je tvrdnja, iskazana u ovom zadatku, dokazana.

2.127. Neka je ΔABC ma koji trougao (Sl.2.68.). Neka je BD jedna težišnica i T težište ovog trougla. Iz tačaka D i T povucimo normale DE i TF na stranicu AB. Kako je D središte stranice AC, to je DE jednako polovini visine trougla iz vrha C. S druge strane, trouglovi BTF i BDE su slični, pa za njihove stranice vrijedi proporcija: $\overline{TF}:\overline{BT}=\overline{DE}:\overline{BD}$. Ako iskoristimo osobinu težišta trougla možemo zaključiti da vrijedi:



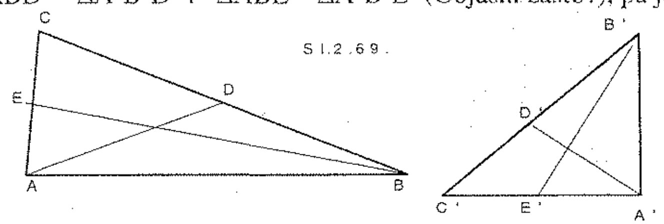
Sl.2.68.

$$\overline{BD}=\frac{3}{2}\cdot\overline{BT},$$

pa, dalje, možemo pisati:

$$\overline{TF}=\frac{\overline{BT}\cdot\overline{DE}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{BT}\cdot\frac{1}{2}\cdot h}{\frac{3}{2}\cdot\overline{BT}}=\frac{h}{3}.$$

2.128. Neka su ΔABC i ΔA'B'C' dva slična trougla (Sl.2.69.). Neka su AD i BE dvije težišnice ΔABC i A'D' i B'E' odgovarajuće težišnice trougla ΔA'B'C'. Vrijedi: ΔABD ~ ΔA'B'D' i ΔABE ~ ΔA'B'E' (Objasni zašto?), pa je:



Sl.2.69.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \text{ i } \frac{\overline{BE}}{\overline{B'E'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{B'E'}} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{A'D'}}{\overline{B'E'}}.$$

Na analogan način se dokazuje proporcionalnost preostalih težišnih duži.

2.129. Neka su dužine stranica jednog trougla a, b i c. Tada je obim ovog trougla O=a+b+c. Neka su odgovarajuće stranice drugog, prvom trouglu sličnog trougla, a', b' i c'. Obim ovog trougla je O'=a'+b'+c'. Kako su stranice sličnih trouglova proporcionalne, to vrijedi:

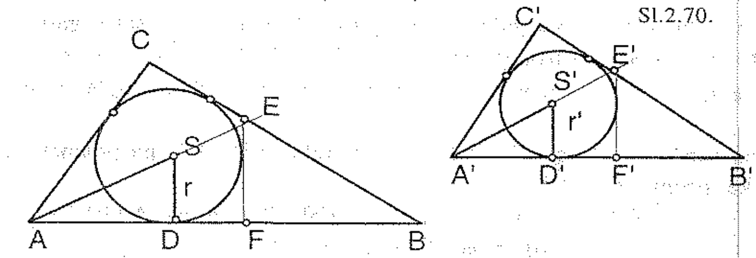
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k \quad\Rightarrow\quad a=ka',\ b=kb',\ c=kc'.$$

$$O=a+b+c=ka'+kb'+kc'=k(a'+b'+c')=k\cdot O'$$

$$\Rightarrow \frac{O}{O'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}(=k).$$

2.130. Kako su stranice sličnih trouglova proporcionalne odgovarajućim visinama, tvrdnja izrečena u ovom zadatku neposredno slijedi iz prethodnog zadatka.

2.131. Neka su u dva slična trougla ΔABC i ΔA'B'C' upisane kružnice k(S, r) i k'(S', r'). Neka su D i D' dodirne tačke ovih kružnica i stranica AB, odnosno A'B' i neka su E i E' presječne tačke simetrala AS, odnosno A'S' sa odgovarajućom stranicom. Neka su F i F' podnožja normala spuštenih iz E i E' na stranicu AB, odnosno A'B' (Sl.2.70.).



Sl.2.70.

Trouglovi ΔADS i ΔA'D'S', ΔAEF i ΔA'E'F', ΔABE i ΔA'B'E' su slični, jer imaju po dva jednaka ugla. (Ugao SAD jednak je polovini ugla CAD, a ugao S'A'D' je polovina ugla C'A'D', pa su uglovi SAD i S'A'D' jednaki). Otuda je:

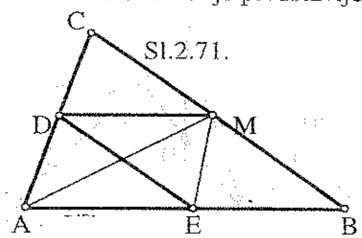
$$\frac{\overline{SD}}{\overline{S'D'}}=\frac{\overline{AS}}{\overline{A'S'}},\ \frac{\overline{AS}}{\overline{A'S'}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{A'E'}},\ \frac{\overline{AE}}{\overline{A'E'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow \frac{\overline{SD}}{\overline{S'D'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}, \text{ odnosno } \frac{r}{r'}=\frac{c}{c'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}.$$

2.132. Zadatak se rješava analogno prethodnom.

2.133. Prema teoremi o srednjoj duži trougla i datim uvjetima vrijedi: AB=2A'B', BC=2B'C', AC=2A'C', odakle zaključujemo da su sve tri stranice prvom trougla proporcionalne sa odgovarajućim stranicama drugog, što znači da su trouglovi slični. Koeficijent sličnosti je $k=\frac{1}{2}$ (odnosno k=2).

2.134. Ako jednakokraki trouglovi imaju jednake uglove pri vrhu, tada su im i uglovi na osnovicama jednaki (Zašto?). To znači da posmatrani trouglovi imaju po dva jednaka ugla, pa su slični.

2.135. Na Sl.2.71. je predstavljen ΔABC sa datim elementima. Prema teoremi o simetrali unutrašnjeg ugla trougla i datim uvjetima, vrijedi:

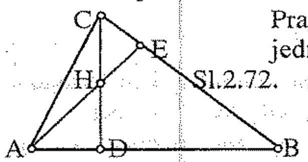


Sl.2.71.

$$\overline{MA}:\overline{MB}=\overline{AE}:\overline{BE},$$
$$\overline{MA}:\overline{MC}=\overline{AD}:\overline{DC}$$

Iz gornjih proporcija i datog uvjeta MB=MC, dobivamo $\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{AD}:\overline{DC}$. Ako, sada, posmatramo homotetiju sa centrom u A i koeficijentom $\overline{AD}:\overline{AC}$, ΔABC će se preslikati u ΔADE. Kako su homotetični trouglovi i slični, to je dokaz završen.

2.136. Neka je ΔABC dati trougao. Neka su AE i CD dvije visine ovog trougla.



Sl.2.72.

Pravougli trouglovi ΔADH i ΔCHE imaju po dva jednaka ugla, pa su slični. Iz ove sličnosti zaključujemo:

$$\overline{AH}:\overline{HD}=\overline{CH}:\overline{HE} \Rightarrow \overline{AH}\cdot\overline{HE}=\overline{CH}\cdot\overline{HD}.$$

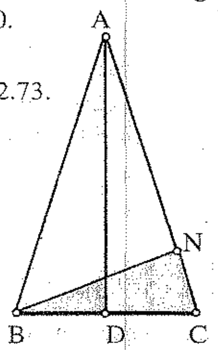
2.137. Stranice trougla su obrnuto proporcionalne odgovarajućim visinama.

Kako je a:b= $h_b : h_a$=5:4 i b:c= $h_c : h_b$=8:5, to je a:b:c=10:8:5, to postoji trougao sa stranicama 10, 8 , 5 (jer su zadovoljene nejednakosti trougla). Među trouglovima koji su slični ovom trouglu jedan ima visine jednake datim dužima.

2.138. Pravougli trougao koji ima jedan oštar ugao 35° ima drugi oštar ugao 55° (zbir oštrih uglova pravouglog trougla je 90°). Kako je jedan oštar ugao drugog pravouglog trougla 55°, to posmatrani trouglovi imaju po dva jednaka ugla, pa jesu slični.

2.139. Uglovi na osnovici prvog jednakokrakog trougla su po 40°, pa posmatrana dva jednakokraka trougla jesu slična.

2.140.



Sl.2.73.

Neka je AD visina datog trougla. Trouglovi ΔABD i ΔBCN su slični, pa vrijedi:

$$\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{BC}:\overline{NC} \Rightarrow \overline{AB}\cdot\overline{NC}=\overline{BD}\cdot\overline{BC}$$

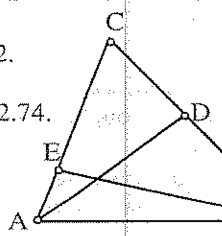
$$\Rightarrow 2\overline{BC}\cdot\overline{NC}=\overline{BD}:\overline{BC} \Rightarrow \overline{BD}=2\overline{NC}.$$

$$\overline{AC}=2\overline{BC}=4\overline{BD}=4\cdot2\overline{NC}=8\overline{NC}$$

$$\Rightarrow \overline{AN}=7\overline{NC}.$$

2.141. Neposredno iz zadatka 2.136. zaključujemo da vrijede navedene jednakosti.

2.142.



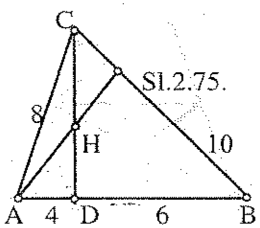
Sl.2.74.

Trougao ΔACD sličan je ΔBCE, odakle slijedi proporcionalnost odgovarajućih stranica:

$$\overline{AC}:\overline{CD}=\overline{BC}:\overline{CE}, \text{ odnosno, } \overline{AC}\cdot\overline{CE}=\overline{BC}\cdot\overline{CD}.$$

2.143. Prema datim podacima zaključujemo da je AB=BC, pa su i visine AE i CD jednake (svaka po 8 jedinica). Pravougli trouglovi ΔADH i ΔABE imaju zajednički oštar ugao, pa su slični. Ako je i $\overline{HD}$= x, tada je $\overline{AH}$=8-x vrijedi:

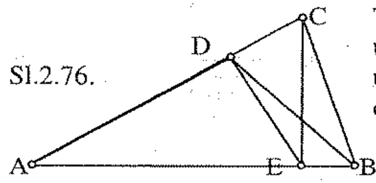
x: (8-x)=6:10 $\Rightarrow$ 10x=48-6x $\Rightarrow$16x=48 $\Rightarrow$ x=3.



Sl.2.75.

2.144. Pravougli trouglovi ΔABD i ΔACE imaju po jedan zajednički oštar ugao, pa su slični. Otuda je $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{CE}$, odnosno , $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AD}:\overline{AE}$.

Sl.2.76.

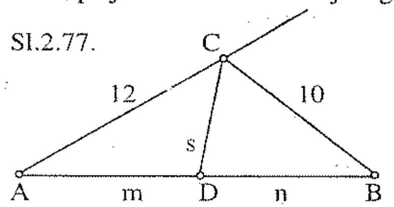


Trouglovi ΔABC i ΔADE imaju zajednički ugao (kod vrha A), a stranice koje zaklapaju taj ugaojednog, proporcionalne su sa stranicama drugog trougla, pa su trouglovi slični.

2.145. Visine trougla obrnuto su proporcionalne odgovarajućim stranicama (Provjeri!). Iz proporcije (h+8):h=20:15 dobijemo h=24. Druga visina je 32.

2.146. Neka je D presjek simetrale ugla ACB=120° i prave AB (Sl.2.77.) i $\overline{AD}$=m, $\overline{DB}$=n. Tada je $\frac{m}{n}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$. Vanjski ugao ΔACD kod vrha C je 120°, pa je CB simetrala vanjskog ugla. Otuda je:

Sl.2.77.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{m+n}{n}=\frac{12}{s} \Rightarrow \frac{m}{n}+\frac{n}{n}=\frac{12}{s} \Rightarrow$$

$$\frac{6}{5}+1=\frac{12}{s} \Rightarrow \frac{12}{s}=\frac{11}{5} \Rightarrow s=\frac{60}{11}.$$

2.147. a:a' = $h_a:h_{a'}$ $\Rightarrow$ $h_{a'}$=14 **2.148**. x=8 **2.149**. O:O'=a:a' $\Rightarrow$ a'=$\frac{72}{7}$.

2.150. O:O' = a:a' = b.b' = c:c'

a) a'=10, b'=15, c'=20 b) a'=18, b'=22,5 , c'=25,5

2.151. O'=19 cm

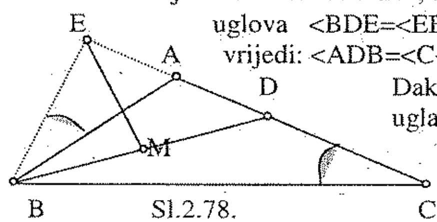
2.152. a'=4. Uputa: Paralelu povući sa stranicom a na rastojanju za trećinu odgovarajuće visine od vrha.

2.153. Zajednička stranica je krak manjeg trougla i osnovica većeg. Krak većeg trougla je 25. O=39, O'=59.

2.154. Površine sličnih trouglova odnose se kao kvadrati odgovarajućih stranica (visina, obima), pa vrijedi:

$$\frac{P}{P_1}=\frac{O^2}{O_1^{\,2}} \Rightarrow O^2=\frac{P\cdot O_1^{\,2}}{P_1}=\frac{60\cdot18^2}{45}=12\cdot36,\ O=12\sqrt{3}.$$

2.155. Kako je M središte duži BD, to je ΔBDE jednakokraki i vrijedi jednakost uglova $\angle BDE=\angle EBD$. Ugao $\angle ADB$ je vanjski ugao ΔBCD, pa vrijedi: $\angle ADB=\angle C+\angle CBD \Rightarrow \angle C=\angle ADB-\angle CBD=\angle ABE$.

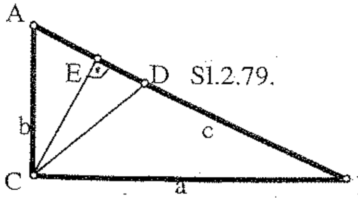


Sl.2.78.

Dakle, trouglovi ΔBCE i ΔABE pored zajedničkog ugla kod vrha E imaju još po jedan jednak ugao, $\angle C=\angle ABE$, pa su slični. Iz ove sličnosti i iz BE=DE slijedi

$\overline{BE}:\overline{CE}=\overline{AE}:\overline{BE} \Rightarrow \overline{DE}:\overline{CE}=\overline{AE}:\overline{DE}$, čime je tvrdnja dokazana.

2.156. Neka je D tačka u kojoj simetrala pravog ugla siječe hipotenuzu AB, a E podnožje visine povučene iz vrha pravog ugla na hipotenuzu (Sl.2.79.).



Sl.2.79.

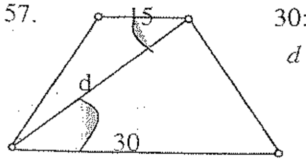
Pravougli trouglovi ΔABC i ΔACE su slični pa vrijedi: b: $\overline{AE}$ =c:b => $\overline{AE}=\frac{b^2}{c}$.

Slični su i pravougli trouglovi ΔABC i ΔBCE, pa je tačno i ovo: a : $\overline{BE}$ = c:a => $\overline{BE}=\frac{a^2}{c}$.

Koristeći dobivene jednakosti, dalje, vrijedi: $\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\frac{\frac{a^2}{c}}{\frac{b^2}{c}}=\frac{a^2}{b^2}$.

Prema teoremi o simetrali unutrašnjeg ugla trougla vrijedi: a:b=m:n , pa se dobivena jednakost može napisati na slijedeći način: $\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{m^2}{n^2}$.

2.157.

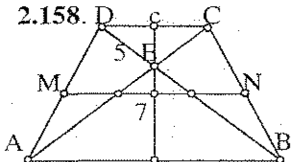


Sl.2.80.

30:d=d:15

$d=15\sqrt{2}$

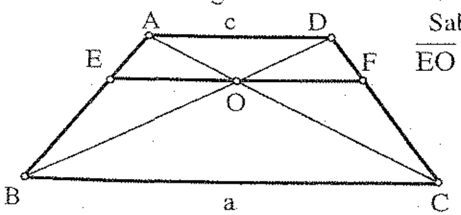
2.158.



Sl.2.81.

Ako su a i c osnovice tada je a+c=18 (Sl.2.81.). Trouglovi ΔABE i ΔCDE su slični, pa vrijedi: a:c=7:5 => 5a=7c; a=10,5 ; c=7,5.

2.159.Trouglovi ΔBOE i ΔBAD su slični,pa vrijedi: $\overline{EO}:\overline{AD}=\overline{BE}:\overline{BA}$ .Iz sličnosti trouglova ΔAOE i ΔABC dobijemo: $\overline{EO}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{BA}$.



Sabiranjem navedenih jednakosti, dalje, je: $\overline{EO}:\overline{AD}+\overline{EO}:\overline{BC}=\overline{BE}:\overline{BA}+\overline{AE}:\overline{BA}$

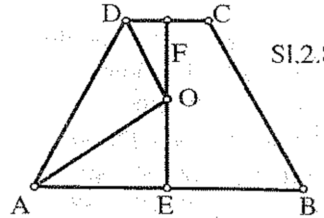
$\overline{EO}:\overline{AD}+\overline{EO}:\overline{BC}=1$, jer je $\overline{BE}+\overline{AE}=\overline{AB}$.

Dalje vrijedi:

Sl.2.82. $\frac{\overline{EO}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{EO}}{\overline{BC}}=1 \Rightarrow \frac{1}{\overline{AD}}+\frac{1}{\overline{BC}}=\frac{1}{\overline{EO}} \Rightarrow \overline{EO}=\frac{1}{\frac{1}{\overline{AD}}+\frac{1}{\overline{BC}}}$.

Analogno, iz sličnosti trouglova ΔCOF i ΔCAD, odnosno, ΔDOF i ΔDBC, dobivamo $\overline{OF}=\frac{1}{\frac{1}{\overline{BC}}+\frac{1}{\overline{AD}}}$. $\overline{EF}=\overline{EO}+\overline{OF}=\frac{1}{\frac{1}{\overline{BC}}+\frac{1}{\overline{AD}}}+\frac{1}{\frac{1}{\overline{BC}}+\frac{1}{\overline{AD}}}=\frac{2}{\frac{1}{\overline{BC}}+\frac{1}{\overline{AD}}}$.

2.160. Ako je O središte upisane kružnice, tada je AS simetrala ugla <A, a prava DO je simetrala ugla <D. Kako su uglovi <A i <D suplementni, to je ugao <AOD pravi, pa trouglovi ΔAOE i ΔDOF imaju jednaka po dva ugla (Koja?). Iz sličnosti ovih trouglova dobije se (Sl.2.83.):



Sl.2.83.

$\overline{AE}:\overline{OE}=\overline{OF}:\overline{DF} \Rightarrow \overline{AE}:r=r:\overline{DF}$

$\Rightarrow \overline{AE}\cdot\overline{DF}=r^2$

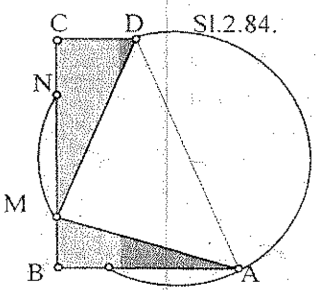
odnosno, $\frac{\overline{AB}}{2}\cdot\frac{\overline{CD}}{2}=r^2 \Rightarrow \overline{AC}\cdot\overline{CD}=4r^2$.

2.161.Ako je dijagonala AC pravouglog trapeza normalna na krak BC, tada su pravougli trouglovi ΔABC i ΔACD slični. Iz sličnosti ovih trouglova slijedi tvrdnja iskazana u zadatku.

2.162. Neka je ABCD dati trapez i M i N tačke u kojima kružnica nad prečnikom AD siječe stranicu BC. Ugao AMD je pravi (periferijski ugao nad prečnikom), pa su uglovi BAM i CMD dva oštra ugla sa normalnim kracima. Otuda pravougli trouglovi ΔABM i ΔCMD imaju po jedan jednak oštar ugao, pa su slični.

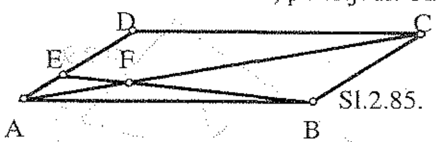
Iz sličnosti ovih trouglova slijedi:

$\overline{AB}:\overline{BM}=\overline{MC}:\overline{CD} \Rightarrow \overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{BM}\cdot\overline{MC}$.



Sl.2.84.

2.163. Suprotne stranice paralelograma su jednake, pa je BC=AD. Trouglovi ΔAFC i ΔBFC su slični, pa vrijedi: $\overline{AE}:\overline{AF}=\overline{BC}:\overline{FC} \Rightarrow \overline{AE}:\overline{AF}=\overline{AD}:\overline{FC}$



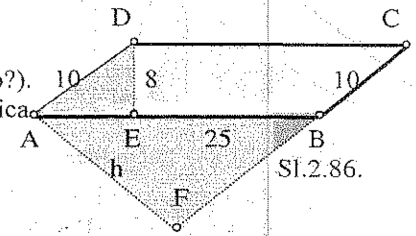
Sl.2.85.

$\Rightarrow \overline{AF}:\overline{FC}=\overline{AE}:\overline{AD} \Rightarrow \overline{AF}:\overline{FC}=1:4$

$\overline{FC}=4\overline{AF} \Rightarrow \overline{AC}=5\overline{AF}$

2.164. Posmatrajmo sliku 2.85. Pravougli trouglovi ΔADE i ΔABF su slični (Zašto?). Iz proporcionalnosti odgovarajućih stranica ovih trouglova dobivamo:

h:25=8:10 => h=20.

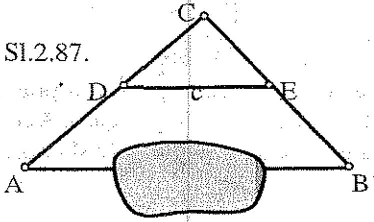


Sl.2.86.

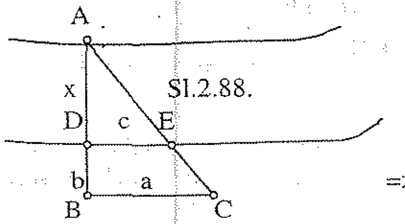
2.165. Neka su tačke A i B pristupačne. Izaberimo ma koju tačku C koja sa datim tačkama A i B određuje ΔABC. Proizvoljnom tačkom D stranice AC, povucimo paralelu DE sa AB. Izmjerimo rastojanja $\overline{DE}$=c, $\overline{AC}$=b, $\overline{CD}$=e. Neka je traženo rastojanje $\overline{AB}$=x. Trouglovi ΔABC i ΔCDE su slični, pa vrijedi:

x:b=c:e => x=bc:e.

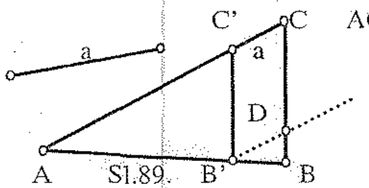
Sl.2.87.



2.166. Na suprotnoj obali rijeke uočimo tačku A (stijenu, drvo i sl.). Na obali na kojoj se nalazimo uočimo tačke B, C i D. Neka je E tačka na obali kojom bi prošla prava AC. Izmjerimo rastojanja $\overline{BD}$=b, $\overline{BC}$=a i $\overline{DE}$=c. Neka je širina rijeke x. Iz sličnosti trouglova ΔABC i ΔADE (Sl.2.88.) dobijamo: x:c=(b+x):a => ax=c(b+x) => ax-cx=bc => (a-c)x=bc => x=bc:(a-c).

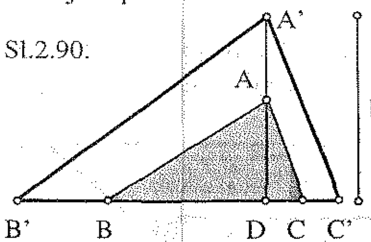


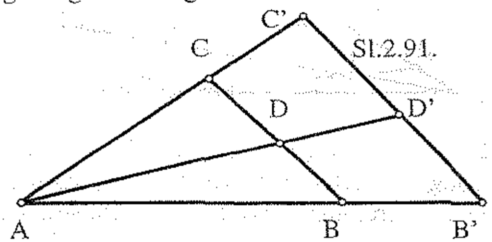
2.167. Analiza: Neka je ΔABC dati trougao i a data duž. Na pravoj BC odredimo tačku D tako da bude $\overline{CD}$=a. Prava koja sadrži tačku D i paralelna je sa pravom AC siječe pravu AB u tački B'. Paralela kroz B' sa pravom BC siječe pravu AC u tački C'. Traženi trougao je ΔAB'C'.



2.168. Neka je AD visina datog trougla (Sl.2.90.). Na polupravoj DA odredimo tačku A' tako da bude $\overline{DA'}$=h_a. Prava koja sadrži tačku A' i koja je paralelna sa AC siječe pravu BC u vrhu C' traženog trougla. Analogno dobivamo i vrh B'.

Sl.2.90.



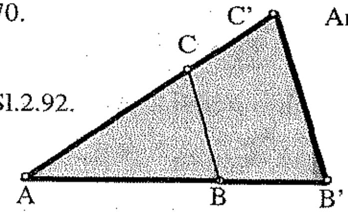


2.169. Analiza: Neka je D središte stranice BC datog trougla (Sl.2.91.)

Neka je tačka D' na polupravoj AD takva da je $\overline{AD'}$=t_a. Paralela kroz tačku D' sa pravom BC siječe poluprave AB i AC, redom u tačkama B' i C'. Traženi trougao je ΔAB'C'.

2.170.

Sl.2.92.

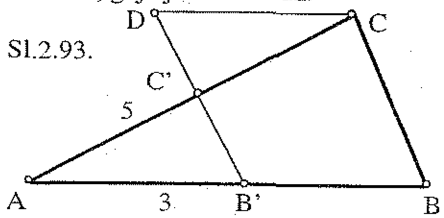


Analiza: Ako je ΔABC dati trougao, tada se na popupravoj AB odredi tačka B' tako da je **BB'=AB.** Paralela kroz B' sa pravom BC siječe pravu AC u vrhu C' traženog trougla. Traženi trougao je ΔAB'C'.

2.171. i **2.172.** Analogno zadatku 2.170.

2.173.a) Analiza: Neka je ΔABC trougao koji zadovoljava date uvjete (Sl.2.93.). Na polupravoj AC odredimo tačku C' tako da je $\overline{AC'}$=5, a na polupravoj AB tačku B' tako da bude $\overline{AB'}$=3. Neka je D tačka na polupravoj B'C' takva da je $\overline{B'D}$=a, gdje je a data duž.

Sl.2.93.



Prava koja sadrži tačku D i koja je paralela sa pravom AB, siječe pravu BC u tački C.

Konstrukcija: Neposredno iz navedene analize vidi se postupak konstrukcije ΔABC.

Dokaz: Dokažimo da dobijeni ΔABC posjeduje zadane elemente i ispunjava date uvjete. Prema konstrukciji, ugao kod vrha A jednak je datom uglu. Kako su stranice BC i B'C' paralelne, to su trouglovi ΔABC i ΔAB'C' slični. Iz ove sličnosti slijedi: $\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{AC'}:\overline{AB'}=5:3$.

Kako je BB'DC paralelogram i $\overline{B'D}$=a, to je i $\overline{BC}$=a. Dakle dobiveni ΔABC je traženi trougao, jer posjeduje zadane elemente i zadovoljava date uvjete.

Diskusija: Ukoliko je data duž a veća od dvije jedinične duži, to zadatak ima jedinstveno rješenje.

b) Zadatak se rješava analogno zadatku pod a). Trougao ΔAB'C' konstruiše se na isti način, a sa D' se može odrediti podnožje visine iz vrha A. Na polupravoj AD' odredi se tačka D tako da je $\overline{AD}$=h_a=2,5 cm . Dalji postupak je očigledan.

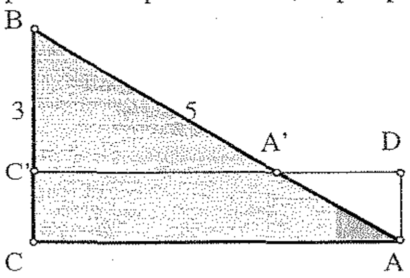
2.174. Ovaj zadatak se rješava analogno kao prethodni.

2.175.a) Uputa: Proporcija b:c=3:5 može se napisati u ekvivalentnom obliku (b+c):b=(3+5):3, odnosno, 7:b=8:3. Sada se može konstruisati duž b. Itd.

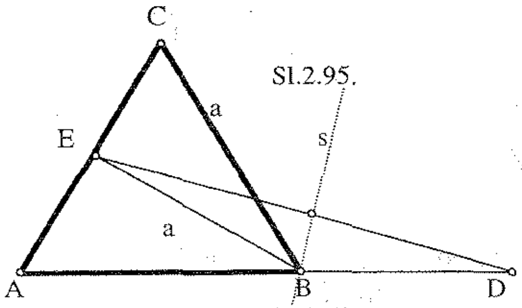
b) b:c=5:7 ⇔ (c-b):b=(7-5):5 => 1:b=2:5 , itd.

2.176. Analiza: Neka je ΔABC traženi pravougli trougao. Ako na polupravoj BC odredimo tačku C' tako da bude $\overline{BC'}$=3, a na polupravoj BA tačku A' tako da bude $\overline{BA'}$=5, pravougli ΔA'BC' se može konstruisati .

Konstrukcijom ovog trougla dobije se vrh B traženog trougla. Ako na polupravoj C'A' odredimo tačku D tako da je $\overline{C'D}$=b, gdje je b data duž, vrh A traženog trougla nalazi se na presjeku prave koja sadrži tačku D i paralelna je sa BC', sa polupravom BA'. Tačka C nalazi se je na presjeku prave koja sadrži tačku A i koja paralelna sa pravom C'A', sa polupravom BC.



Sl.2.94.

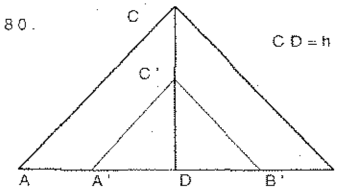


2.177. Analiza: Jednakokraki trougao sa osnovicom 4 i krakom 3 može se konstruisati. Ako na visinu ovog trougla koja odgovara osnovici, od vrha, nanesemo datu duž h_a=3, dobićemo podnožje visine datog trougla. Dalji tok analize je očigledan.

2.178. Analiza: Trougao sa stranicama 3, 5 i 6 se može konstruisati. Ako na visinu koja odgovara stranici 3, od vrha nanesemo datu duž h_a=5, dobija se duž koja je visina traženog trougla. Preostala dva vrha nalaze se na presjeku prave koja prolazi kroz podnožje duži h_a=3 i koja je paralelna sa stranicom čija je dužina 3 i sa kracima ugla.

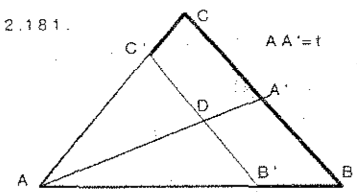
2.179. Analiza: Neka je ABC traženi jednakostranični trougao i BE njegova jedna visina. Ako je $\overline{AD} = a + h$, tada je trougao BDE jednakokraki sa osnovicom DE. Trougao ABE može se konstruisati (ugao kod vrha A je 60°, ugao kod vrha D je 15°, AD=a+h). Vrh B nalazi se na presjeku simetrale s duži DE i duži AD. Vrh C nalazi se na presjeku kružnice k(B, BA) i poluprave AE.

2.180.



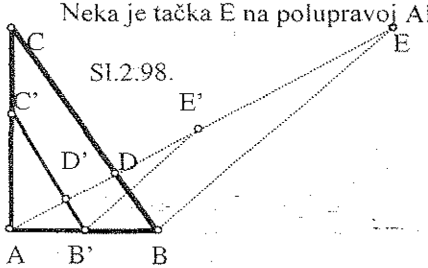
Sl.2.96.

2.181.



Sl.2.97.

2.182.Neka je ΔABC traženi trougao. Neko je AD visina koja odgovara hipotenuzi. Neka je tačka E na polupravoj AD takva da je $\overline{AE}$ = m, gdje je m data duž.

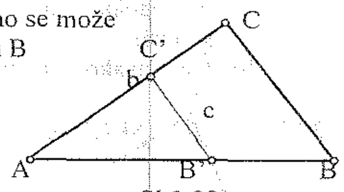


Ako na polupravoj AE uzmemo ma koju tačku E' i kroz nju povučemo paralelu sa BE, na presjeku ove paralele i prave AB neka je tačka B'. Neka je C' tačka na AC takva da je BC' paralelno sa BC. Iz sličnosti trouglova ΔABC i ΔAB'C' možemo zaključiti da je

$\overline{AE'} = \overline{B'C'} + \overline{AD'}$. Trougao ΔAB'C' možemo konstruisati. To je ma koji pravougli trougao koji ima jedan oštar ugao jednak datom, a zatim se mogu, redom, odrediti tačke D', E', E, B i C.

2.183. Uputa: Konstruiše se ma koji ΔA'B'C' koji ima dva ugla jednaka datim (recimo kod vrhova A' i B'). Zatim se konstruiše novi ΔABC koji je sličan sa ΔA'B'C' i koji ima stranicu AB jednaku datoj duži.

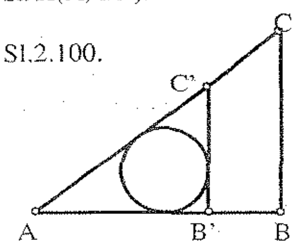
2.184. Analiza: Neka je ΔAB'C' trougao sa stranicama $\overline{AC'}$=b, $\overline{B'C'}$=c i uglom B'AC' koji je jednak datom uglu. Ovaj trougao se može konstruisati. Ako na polupravoj AB' odredimo tačku B tako da bude AB jednako datoj duži, i konstruišemo pravu koja sadrži tačku B i paralelna je sa pravom B'C', na presjeku ove prave sa pravom AC' dobićemo tačku C. Trougao ABC je traženi trougao. Izvesti konstrukciju i dokaz.

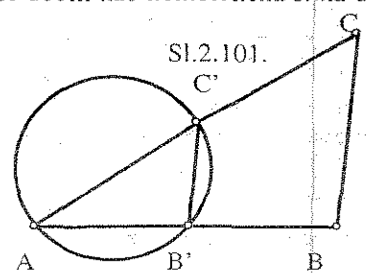


Sl.2.99.

2.185. Neka je ΔAB'C' dati trougao (Sl.2.100.). Neka je r' radijus upisane kružnice u dati trougao. Traženi ΔABC može se dobiti kao homotetična slika datog trougla za H(A, r/r').

Sl.2.100.

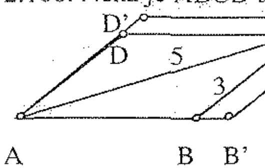




2.186. Zadatak se rješava analogno prethodnom (Vidi Sl. 2.101.).

2.187. Uputa: Ako je AB'C'D' dati pravougaonik i a data duž koja je jednaka stranici AB traženog pravougaonika, tada se traženi pravougaonik može dobiti kao homotetična slika datog uzimajući za centar homotetije vrh A datog pravougaonika, a za koeficijent odnos date duži i odgovarajuće stranice datog pravougaonika.

2.188. Neka je ABCD traženi paralelogram (Sl. 2.102.). Paralelogram AB'C'D' sa stranicama 5 i 3 i uglom između njih od 60° možemo konstruiusati. Na dijagonali AC' ovog paralelograma odredimo tačku C tako da bude $\overline{AC}$=5. Tačke B i D dobivamo na presjeku paralela povučenih tačkom C i krakova ugla B'AD'. Izvesti konstrukciju i dokaz.



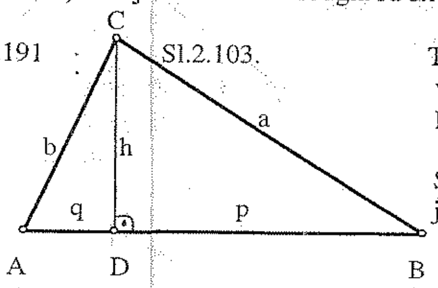
Sl.2.102.

2.7. Primjena sličnosti na pravougli trougao. Pitagorina teorema

2.189.a) Dva pravougla trougla su slična ako imaju po jedan oštar ugao jednak.
b) Dva pravougla trougla su slična ako su katete jednog proporcionalne odgovarajućim katetama drugog.
c) Dva pravougla trougla su slična ako su hipotenuza i kateta jednog proporcionalne hipotenuzi i odgovarajućoj kateti drugog.

2.190.a) Dva jednakokraka trougla su slična ako imaju po jedan jednak ugao na osnovici.
b) Dva jednakokraka trougla su slična ako imaju jednake uglove pri vrhu.

2.191



Trouglovi ΔABC i ΔBCD su slični, pa vrijedi: $p : a = a : c \Rightarrow p = a^2 c$.
I trouglovi ΔABC i ΔACD su slični, pa je $q : b = b : c \Rightarrow q = b^2 c$.
Sada vidimo da je odnos projekcija p i q jednak odnosu kvadrata dužina kateta.

2.192. Pravougli trouglovi ΔACD i ΔBCD su slični jer su im oštri uglovi <ACD i <CBA, uglovi sa normalnim kracima, pa su jednaki. Iz sličnosti ovih trouglova, prema Sl. 2.103. zaključujmo:

$$q:h = h:p \qquad \Rightarrow \qquad h^2 = pq.$$

2.193. Prema zadatku 2.191. i oznakama sa Sl. 2.103., vrijedi:

$$a^2 + b^2 = pc + qc = (p+q)c = c \cdot c = c^2.$$

2.194. $c=10,\ p=\dfrac{18}{5},\ q=\dfrac{32}{5},\ h=\dfrac{24}{5}.$ **2.195**. $a^2 = 78,\ b^2 = 91,\ h^2 = 42.$

2.196. $k = \dfrac{5}{4}$. Katete drugog trougla su 20 i 15.

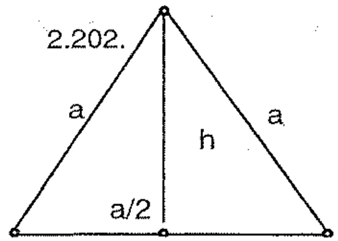
2.197. Riješiti trougao znači odrediti njegove nepoznate elemente (stranice, visine, površinu, uglove, ...). Ovdje ćemo odreditivati nepoznate stranice, visinu na hipotenuzu, odsječke koje visina gradi na hipotenuzi i površinu pravouglog trougla.
a) $b=3,\ p=16/5$ b) $p=25,\ c=p+q=169,\ b=256,\ a=65$ c) $c=25,\ h=12,\ b=20,\ a=15$

2.198.a) $p=16,\ q=4,\ a=8\sqrt{5},\ b=4\sqrt{5}$, ($q=16,\ p=4,\ b=8\sqrt{5},\ a=4\sqrt{5}$)
b) $p=\dfrac{18}{5},\ q=\dfrac{32}{5},\ a=6,\ b=8,\ P=24$ c) $a=16,\ b=30,\ p=\dfrac{128}{17},\ q=\dfrac{450}{17},\ P=24($

2.199. Kateta je geometrijska sredina hipotenuze i svoje prijekcije na hipotenuzu: $a^2=pc$, $b^2=qc$, pa je: $a^2:b^2 = p:q \qquad \Rightarrow \qquad a:b = \sqrt{p}:\sqrt{q}$.

2.200. $d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}.$ **2.201**. $a = \dfrac{d}{\sqrt{2}} = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}.$

2.202.



Sl.2.104.

a) $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $r^2=\left(\dfrac{2}{3}h\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}=$
$=\dfrac{a^2}{3}-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a^2}{12},\quad r=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ c) $R=\dfrac{2}{3}h=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

2.203.a) $h=5\sqrt{3}$ b) $h=2\sqrt{3}$ c) $h=4\sqrt{3}$ d) $h=3$

2.204.a) $h=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ b) $h=2\sqrt{3}$ c) $h=20$ d) $h=24$

2.205. $a = 75\%b \Rightarrow a = \dfrac{75}{100}b \Rightarrow a = \dfrac{3}{4}b.\ a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{4}b\right)^2 + b^2 = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{9b^2}{16} + b^2 = 100 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = 8,\ a = 6.$

2.206. $(c-8)^2 + 20^2 = c^2 \Rightarrow c = 29,\ a = 21,\ O = a + b + c = 70.$

2.207. Neka je x kateta. Druga kateta je x-10, a hipotenuza je x+10.
Primjenom Pitagorine teoreme dobije se:

$$(x+10)^2 = (x-10)^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 40\,cm.$$

Katete su: 30 cm i 40 cm, a hipotenuza je 50 cm.

2.208. Uputa: Koristiti sličnost pravouglih trouglova i Pitagorinu teoremu.
$h=\dfrac{78}{5}$. **2.209**. $h=\dfrac{56}{5}$

2.210. Neka je ABCD pravougaonik. Prema Pitagorinoj teoremi vrijedi:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2.$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{C'C}^2 = \left(\overline{AB} + \overline{BC'}\right)^2 + \overline{C'C}^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB}\cdot\overline{BC'} + \overline{BC'}^2 + \overline{C'C}^2,$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB}\cdot\overline{BC'} + \overline{BC'}^2 + \left(\overline{BC}^2 - \overline{BC'}^2\right) = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB}\cdot\overline{BC'} + \overline{BC}^2$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{BD'}^2 + \overline{D'D}^2 = \left(\overline{AB} - \overline{AD'}\right)^2 + \overline{C'C}^2 = \left(\overline{CD} - \overline{BC'}\right)^2 + \overline{C'C}^2 =$$

$$= \overline{CD}^2 - 2\overline{CD}\cdot\overline{BC} + \overline{BC'}^2 + \overline{C'C}^2 = \overline{CD}^2 - 2\overline{CD}\cdot\overline{BC'} + \overline{BC'}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BC'}^2$$

$$\Rightarrow \quad \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 - 2\overline{CD}\cdot\overline{BC'} + \overline{AD}^2.$$

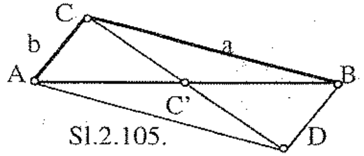
Sabiranjem dviju gornjih jednakosti dobije se:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB}\cdot\overline{BC'} + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{CD}\cdot\overline{BC'} + \overline{AD}^2 =$$

$$= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2.$$

2.211. Analogno prethodnom zadatku.

2.212. Neka je ΔABC ma koji trougao. Neka je CC' težišnica ovog trougla koja odgovara stranici AB (=c). Na pravoj CC' odredimo tačku D tako da je



Sl.2.105.

C'D=C'C. Četverougao ABCD je paralelogram. Dijagonale ovog paralelograma su AB (=c) i CD (=2 t_a). Prema prethodnom zadatku je zbir kvadrata dijagonala jednak zbiru kvadrata stranica, odnosno:

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+\overline{AD}^2 \Rightarrow c^2+4t_c^2=2a^2+2b^2$$

$$\Rightarrow 4t_c^2=2a^2+2b^2-c^2 \quad \Rightarrow \quad t_c^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4} \quad \Rightarrow \quad t_c=\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$$

Analogno dolazimo do slijedećih relacija:

$$t_a=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}, \qquad t_b=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}.$$

2.213. Prema prethodnom zadatku vrijedi:

$$t_a^2+t_b^2=\left(\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+4c^2}{4}=\frac{5c^2}{4}=$$

$$=5\cdot\frac{c^2}{4}=5\cdot\frac{a^2+b^2}{4}=5\cdot\frac{2a^2+2b^2-(a^2+b^2)}{4}=5\cdot\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}=5t_c^2.$$

2.214. O = a+b+c = b+(a+c) = b+2b = 3b.

2.215. $d_1:d_2=3:4 \Rightarrow d_1=\frac{3}{4}\cdot d_2$. Ako je a stranica romba, tada vrijedi:

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=a^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{d_2}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=a^2 \Rightarrow 25d_2^2=64a^2$$

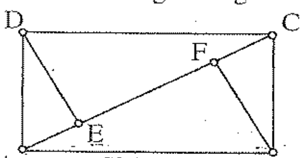
$$\Rightarrow 25d_2^2=4(16a^2) \Rightarrow 25d_2^2=4(4a)^2 \Rightarrow 25d_2^2=4 \Rightarrow d_2=\frac{2}{5}, d_1=\frac{3}{10}.$$

2.216. $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=a^2 \Rightarrow (2{,}4)^2+7^2=a^2 \Rightarrow 5{,}76+49=a^2 \Rightarrow a=7{,}4; O=29{,}6$

2.217. Radijus upisane kružnice jednak je visini romba. Stranica romba je a=10.

Radijus je $r=\frac{24}{5}$.

2.218. Pravougli trouglovi ΔADE i ΔBCF su podudarni, pa je AE=FC. Kateta



Sl.2.106.

BC pravouglog ΔABC je geometrijska sredina hipotenuze AC i svoje projekcije FC na hipotenuzu. Zato je: $\overline{BC}:\overline{AC}=\overline{FC}:\overline{BC}$,

odnosno, $\overline{BC}^2=\overline{AC}\cdot\overline{FC}$.

Za drugu katetu pravouglog ΔABC, analogno,

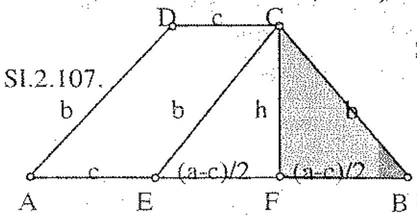
vrijedi: $\overline{AB}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AF}$.

Otuda je: $\overline{AB}^2:\overline{BC}^2=\overline{AF}:\overline{FC}$, odnosno, $\overline{AF}:\overline{FC}=2:1$, jer je, prema uvjetu zadatka $\overline{AB}:\overline{BC}=\sqrt{2}:1$. Dakle, vrijedi: $\overline{AF}:\overline{FC}=2:1$ i $\overline{AE}=\overline{FC}$, pa je $\overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FC}$.

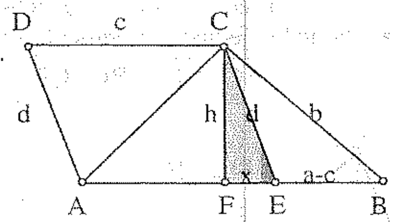
2.219. Dijagonale datog trapeza dijele trapez na četiri pravougla trougla. Hipotenuza svakog od tih trouglova je jedna stranica trapeza. Koristeći Pitagorinu teoremu izračunavamo stranice. Rezultat: $O=30cm+21\sqrt{2}\,cm$

2.220. Prava CE je paralelna sa AD, pa je $\overline{AE}$=c, $\overline{BE}$=a-c. Trougao ΔBCE je jednakokraki sa osnovicom BE. Visina CF dijeli duž BE na jednake dijelove. Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli ΔBCF dobivamo visinu h ΔBCE (i trapeza ABCD): $h^2=b^2-\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \Rightarrow h=\sqrt{841-400}=21.$

Sl.2.107.



Sl.2.108.



2.221. h=20 cm,

2.222. Ako je E tačka na osnovici AB takva da je CE paralelno sa krakom AD, tada je $\overline{CE}=\overline{AD}$=d, $\overline{AE}=\overline{DC}$=c i $\overline{AB}-\overline{AE}$=a-c (Sl.2.108.). Ako je $\overline{EF}$=x, tada je $\overline{FB}$=(a-c)-x. Trouglovi ΔEFC i ΔBCF su pravougli, pa se na oba može primijeniti Pitagorina teorema. Zato vrijedi:

$$h^2=d^2-x^2,\ h^2=b^2-[(a-c)+x]^2$$

$$\Rightarrow d^2-x^2=b^2-[(a-c)+x]^2 \Rightarrow 289-x^2=625-144-24x-x^2$$

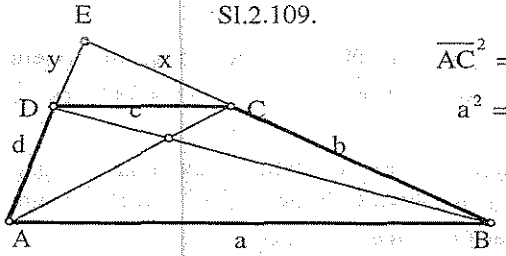
$$\Rightarrow 24x=192 \Rightarrow x=8.\ h=15cm.$$

Dijagonalu AC trapeza možemo izračunati primjenom Pitagorine teoreme na

ΔACF: $\quad \overline{AC}^2=\overline{AF}^2+\overline{CF}^2=(c-x)^2+h^2=8^2+15^2=289 \Rightarrow \overline{AC}=17$cm.

$$\overline{BD}^2=(a+x)^2+h^2=36^2+15^2=1521 \Rightarrow \overline{BD}=39\text{ cm}.$$

2.223. Kako su AD i BC normalne prave, to su trouglovi ΔABE, ΔACE, ΔDEC i ΔBDE pravougli i na svaki možemo primijeniti Pitagorinu teoremu:



Sl.2.109.

$$\overline{AC}^2=\overline{DE}^2+\overline{CE}^2,\ \overline{BD}^2=\overline{BE}^2+\overline{DE}^2,$$
$$a^2=\overline{DE}^2+\overline{BE}^2,\ c^2=\overline{DE}^2+\overline{CE}^2.$$

Dalje vrijedi:

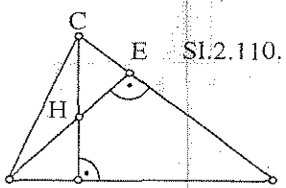
$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=$$
$$\overline{DE}^2+\overline{CE}^2+\overline{BE}^2+\overline{DE}^2=a^2+c^2.$$

2.224. Neka su CD i AE dvije visine ΔABC i neka je tačka H ortocentar ΔABC. Pravougli trouglovi ΔADH i ΔCHE imaju po jedan jednak oštar ugao (unakrsni uglovi), pa su slični (Sl. 2.110.). Otuda je:

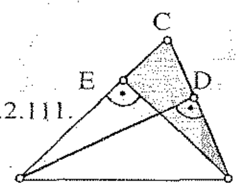
$$\overline{AH}:\overline{HD}=\overline{CH}:\overline{HE} \quad \Rightarrow \quad \overline{AH}\cdot\overline{HE}=\overline{CH}\cdot\overline{HD}.$$

2.225. Trouglovi ΔACD i ΔBCE su dva pravougla trougla koji su slični (jer imaju po jedan jednak, zajednički, oštar ugao, Sl. 2.111.). Otuda je

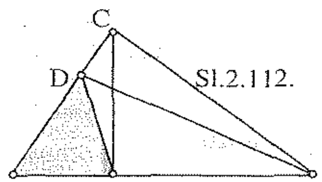
$$\overline{AC}:\overline{CD}=\overline{BC}:\overline{CE}\text{, odnosno, } \overline{AC}\cdot\overline{CE}=\overline{BC}\cdot\overline{CD}.$$



Sl.2.110.



Sl.2.111.



Sl.2.112.

2.226. Pravougli trouglovi ΔABD i ΔACE imaju jedan zajednički oštar ugao, pa su slični (Sl. 2.112.). Iz ove sličnosti slijedi: $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$, $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AD}:\overline{AE}$, što znači da su stranice AB i AC proporcionalne stranicama AD i AE. To, dalje, znači da su trouglovi ΔABC i ΔADE, koji imaju zajednički ugao kod vrha A, slični.

2.227. Vidi prethodni zadatak.

2.228. Koristeći Pitagorinu teoremu i teoreme: 1. Kateta pravouglog trougla je geometrijska sredina hipotenuze i svoje projekcije na hipotenuzu i 2. Hipotenuzina visina je geometrijska sredina odsječaka koje gradi na hipotenuzi, dobivamo:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{c^2}{cp\cdot cq}=\frac{1}{pq}=\frac{1}{h^2}.$$

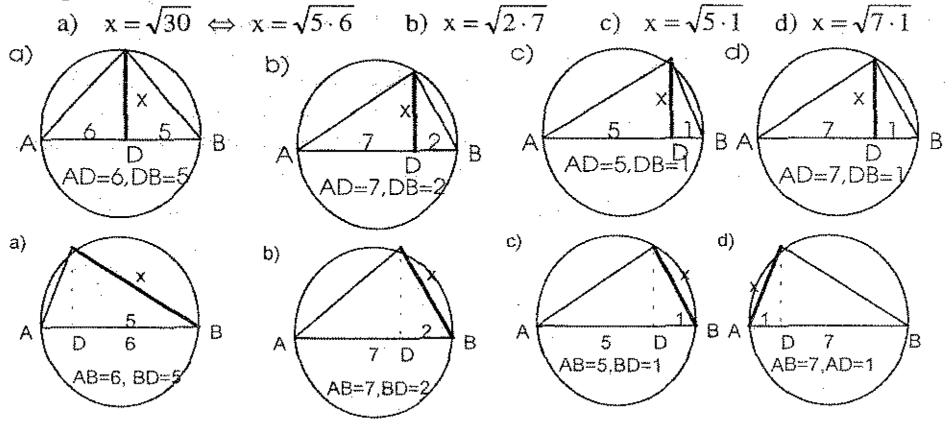
2.229. Prema datim uvjetima vrijedi: $a^2+b^2=4m^2n^2+(m^2-n^2)^2=$
$=4m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4=m^4+2m^2n^2+n^4=(m^2-n^2)^2=c^2$. Vidimo da za stranice trougla, koje ispunjavaju date uvjete, vrijedi Pitagorina teorema, pa je taj trougao pravougli sa katetama a i b i hipotenuzom c.

2.230. Zadatke ovog tipa rješavamo primjenom jedne od teorema:

1) Kateta je geometrijska sredina hipotenuze i svoje projekcije na hipotenuzu,

2) Visina koja odgovara hipotenuzi je geometrijska sredina odsječaka koje gradi na hipotenuzi.

a) $x=\sqrt{30} \Leftrightarrow x=\sqrt{5\cdot 6}$ b) $x=\sqrt{2\cdot 7}$ c) $x=\sqrt{5\cdot 1}$ d) $x=\sqrt{7\cdot 1}$



Sl.2.113. Kompletan zadatak je riješen na dva načina.

2.231.a) Konstrukcijom pravouglog trougla čija je hipotenuza jednaka datoj duži a, i kateta datoj duži b, dobijamo traženu duž x kao drugu katetu.

b) Traženu duž x možemo konstruisati kao visinu pravouglog trougla čija je hipotenuza c=a+b (Vidi prethodni zadatak!).

c) Prvo odredimo duž $y^2=ab$, *odnosno*, $y=\sqrt{ab}$, pa traženu duž x dobijemo kao hipotenuzu trougla čije su katete y i b.

2.232.a) $x=a\sqrt{3} \Rightarrow x:a=\sqrt{3}:1$. Duž x možemo odrediti kao četvrtu proporcionalu duži a, $\sqrt{3}$ i jedinične duži.

b) Analogno zadatku pod a)

c) $x=\sqrt{\dfrac{ab}{2}} \Leftrightarrow x\sqrt{2}=\sqrt{ab}, y=\sqrt{ab} \Rightarrow x\sqrt{2}=y \Leftrightarrow x:y=1:\sqrt{2}.$

Dalji tok je analogan zadatku pod a).

2.233.a) Uputa: Konstruišemo duž y, tako da bude $y^2=ab$, a zatim, pravougli trougao čije su katete y i c. Hipotenuza ovog trougla je tražena duž x.

b) i c) Analogno kao zadatak a).

2.234. Prvo konstruišemo duž y za koju vrijedi $y^2=bc$, a zatim, traženu duž x odredimo konstrukcijom pravouglog trougla čije su katete a i y. Tražena duž x je hipotenuza dobivenog trougla.

2.235. $x=a^2:b \Leftrightarrow bx=a^2 \Leftrightarrow a:b=x:a$. Duž x možemo dobiti kao četvrtu proporcionalu duži a, b i a.

2.236. Neka je stranica kvadrata x. Tada je površina kvadrata x^2. Ako sa a označimo stranicu datog jednakostraničnog trougla, tada je površina ovog trougla $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Prema datom uvjetu zadatka mora da vrijedi: $x^2=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ako konstruišemo duž b za koju vrijedi: $b=\frac{a^2}{4}$, *odnosno*, $b:a=a:4$ i duž $c=\sqrt{3}$, tada traženu stranicu kvadrata x možemo konstruisati iz jednakosti:

$$x^2=bc,\ odnosno,\ x=\sqrt{bc}.$$

2.237. Ako je x stranica traženog jednakostraničnog trougla, a i b stranice datog pravougaonika, tada iz uvjeta zadatka vrijedi:

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=ab \quad\Leftrightarrow\quad x^2=\frac{4ab}{\sqrt{3}} \quad\Leftrightarrow\quad x^2=\frac{4a}{\sqrt{3}}\cdot b .$$

Ako konstruišemo duž $y=\frac{4a}{\sqrt{3}}$, tada traženu duž x odredimo iz uvjeta $x^2=yb$.

2.238. Neka su d_1 i d_2 dijagonale datog romba, a x stranica traženog jednakostraničnog trougla. Tada vrijedi:

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{d_1d_2}{2} \Leftrightarrow x^2\sqrt{3}=2d_1d_2 \Leftrightarrow x^2=\frac{2d_1d_2}{\sqrt{3}}.$$

2.239. Površina deltoida jednaka je polovini proizvoda njegovih dijagonala. Zadatak rješavamo analogno prethodnom.

2.240. Ako je x stranica trougla i a stranica datog kvadrata, tada vrijedi:

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=a^2 \text{ , odnosno, } x^2=\frac{4a^2}{\sqrt{3}} \quad\Leftrightarrow\quad x^2=\frac{2a}{\sqrt{3}}\cdot a \text{, itd....}$$

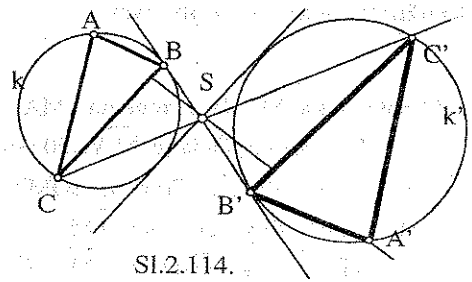
2.241. Ako je x stranica kvadrata, a i b stranice datog pravougaonika, tada vrijedi $x^2=ab$, pa x možemo dobiti kao visinu koja odgovara hipotenuzi c=a+b pravouglog trougla i koja na njoj gradi odsječke jednake a i b.

2.242. Uputa: Koristiti teoremu o kateti ili o visini koja odgovara hipotenuzi i prethodne zadatke.

2.243. $x^2=17 \quad\Leftrightarrow\quad x:1=17:x$, itd.

2.244. Analiza: Neka su ΔABC i ΔA'B'C' dva data slična trougla. Na polupravoj A'B' odredimo tačku A" tako da je A'A"=AB, a na polupravoj A'C' odredimo tačku C" tako da bude A'C"=AC. Trougao ΔA'B"C" je sličan ΔA'B'C' (objasni zašto!) i podudaran sa ΔABC. Dokazati!

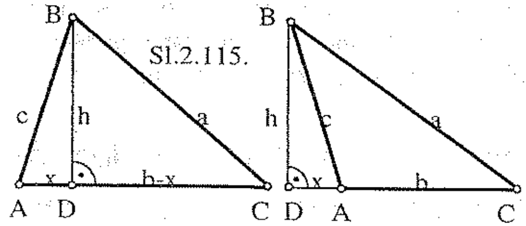
2.245. Neka je k data kružnica i ΔABC dati trougao. Odredimo kružnicu k' koja je opisana datom trouglu. Neka je S presjek unutrašnjih tangenti ovih kružnica. Tada se homotetijom u odnosu na tačku S kružnica k' može preslikati u datu kružnicu k. Istom homotetijom će se dati ΔABC preslikati u ΔA'B'C' koji je upisan u datu kružnicu k. Kako se homotetijom prava preslikava u paralelnu pravu, to su stranice ΔA'B'C' paralelne sa odgovarajućim stranicama ΔABC.



Sl.2.114.

2.246. Uputa: Kao u prethodnom zadatku doći do ΔA'B'C', a zatim taj trougao rotirati oko centra O date kružnice za ugao od 90^0 u pozitivnom ili negativnom smjeru.

2.247. Neka je BD visina ΔABC. Duž AD označimo sa x. Tada je $\overline{DC}$=b-x, kada je ugao kod vrha A oštar, i $\overline{DC}$=b+x ako je navedeni ugao tup. Primjenom Pitagorine teoreme na trouglove ΔABD i ΔBCD dobije se:



Sl.2.115.

$$h_b^2=c^2-x^2,\ h_b^2=a^2-(b-x)^2 \Rightarrow c^2-x^2=a^2-(b-x)^2 \Rightarrow x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}.$$

$$h_b^2=c^2-x^2=c^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)^2=\left(c-\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)\left(c+\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)=$$

$$=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2b}\cdot\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2b}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2b}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2b}=$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b}\cdot\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2b}=$$

$$=\frac{(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)(a+b+c)(a+b+c-2a)}{4b^2}=$$

$$=\frac{(2s-2c)(2s-2b)2s(2s-2a)}{4b^2}=\frac{16s(s-c)(s-b)(s-a)}{4b^2}=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2}.$$

Otuda je:

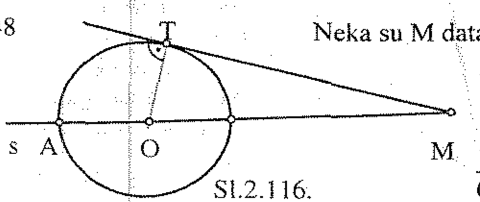
$$h_b=\sqrt{\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2}}=\frac{2}{b}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad,\quad 2s=a+b+c.$$

Pokušaj, na analogan način, doći do izraza za preostale dvije visine trougla:

$$h_a=\frac{2}{a}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ h_c=\frac{2}{c}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ 2s=a+b+c.$$

2.8. Potencija tačke u odnosu na kružnicu. Karnoovi obrasci. Zlatni presjek duži

2.248



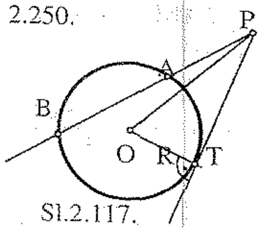
Sl.2.116.

Neka su M data tačka, MT data tangenta i MA data sječica. Tada je $\overline{MA}=50$ cm, $\overline{OT}=R=21$ cm. Trougao ΔOMT je pravougli sa katetama $\overline{TM}=t$, $\overline{OT}=R$ i hipotenuzom $\overline{OM}=50-R$. Prema Pitagorinoj teoremi vrijedi:

$t^2=(50-R)^2-R^2 \quad \Rightarrow \quad t^2=29^2-21^2=(29-21)(29+21)=8\cdot 50 \quad \Rightarrow \quad t=20.$

2.249. Prema slici iz prethodnog zadatka, Pitagorinoj teoremi i datim podacima, vrijedi: $(R+4)^2=8^2+R^2 \Rightarrow R^2+8R+16=64+R^2 \Rightarrow 8R=48 \Rightarrow R=6.$

2.250.



Sl.2.117.

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PT}^2 \quad \Rightarrow \quad 2\overline{PA}^2=(\overline{OP}-\overline{OT})(\overline{OP}+\overline{OT})$

$\Rightarrow \quad 2\overline{PA}^2=(13-5)(13+5) \quad \Rightarrow \quad 2\overline{PA}^2=8\cdot 18$

$\Rightarrow \quad \overline{PA}^2=72.$

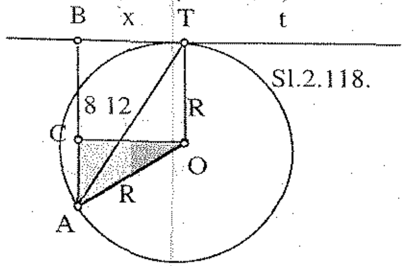
$\overline{PB}^2=288 \quad \Rightarrow$ Sječica je $\overline{PB}=12\sqrt{2}.$

2.251. Uputa: $t^2=20(20+60) \Rightarrow t=40$ cm.

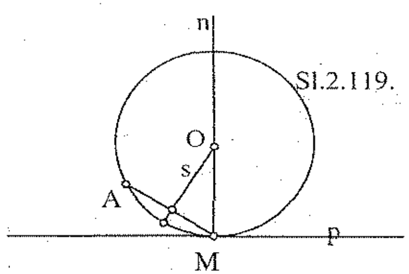
2.252. Uputa: Ako je 2x dužina sječice, tada vrijedi: $2x^2=2(2+14) \Rightarrow x=4$. Sječica je 8 cm.

2.253. Uputa: Ako je t dužina tangentne duži, a s dužina sječice, tada vrijedi:
$t^2=(t-8)(2t+12) \quad \Rightarrow \quad t=12$ cm, $s=36$ cm.

2.254. Iz pravouglog ΔABT, primjenom Pitagorine teoreme, dobivamo x. Stranice pravouglog ΔAOC su $\overline{AO}=R$, $\overline{AC}=8-R$, $\overline{CO}=x$, pa, primjenom iste teoreme dobivamo R=9 (Sl.2.118.)



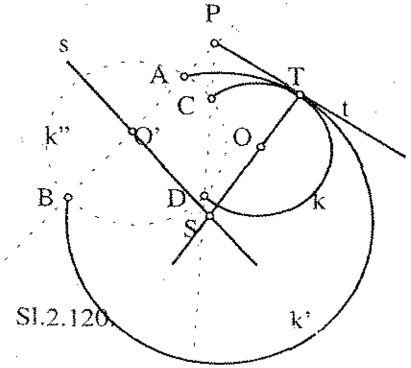
Sl.2.118.



Sl.2.119.

2.255. Središte O tražene kružnice nalazi se na presjeku simetrale s duži AM i normale n na datu pravu u tački M. Radijus kružnice je OA, odnosno OM (Sl. 2.119.).

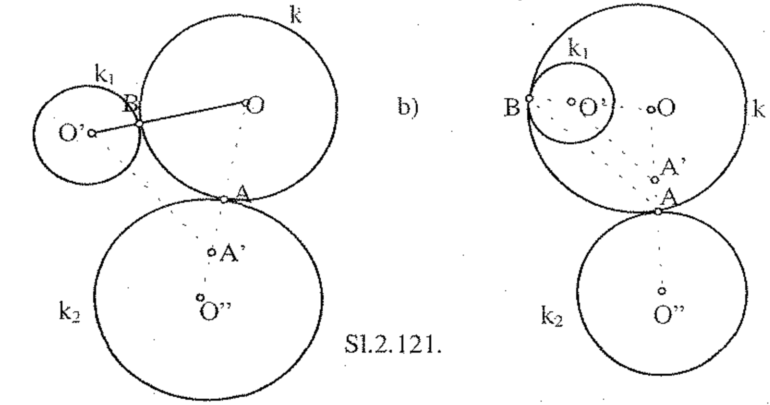
2.256. **Analiza**: Neka je k(O, r) data kružnica, a A i B date tačke. Središte kružnice koja sadrži tačke A i B nalazi se na simetrali s duži AB. Ako je T dodirna tačka date kružnice k i tražene k', tada se središte tražene kružnice nalazi na pravoj OT. To znači da je dovoljno poznavati tačku T da bi se središte S tražene kružnice odredilo na presjeku pravih s i OT. Ako su C i D tačke u kojima pomoćna kružnica k" koja sadrži date tačke A i B siječe datu kružnicu k i tačka P presječna tačka pravih AB i CD, tada se tačka T može odrediti kao dodirna tačka tangente povučene iz tačke P na datu kružnicu (Sl. 2.120.).



Sl.2.120.

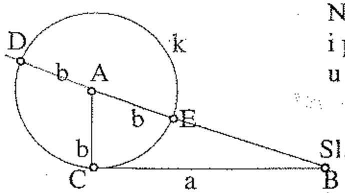
Konstrukcija:
1. Prava s kao simetrala duži AB.
2. Kružnica k(O', O'A) koja sadrži date tačke A i B i siječe datu kružnicu k(O, R).
3. $k \cap k'=\{C, D\}$.
4. $AB \cap CD=\{P\}$.
5. Tangenta t iz P na datu kružnicu k.
6. $t \cap k=\{T\}$.
7. $TO \cap s=\{S\}$.
8. Tražena kružnica je k'(S, SA)

2.257. Analiza: Neka su k_1 i k_2 date kružnice i A data tačka na kružnici k_2. Na pravoj O"A uzmimo tačku A' tako da je $\overline{AA'}=r_1$, gdje je r_1 radijus prve kružnice. Ako sa B označimo tačku presjeka paralele sa O'A' kroz tačku A i kružnice k_1, tada se središte O tražene kružnice nalazi na presjeku pravih O'B i O"A. (Sl. 2.121.)



Sl.2.121.

2.258. Neka je ΔABC pravougli trougao sa katetama $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ i hipotenuzom $c=\overline{AB}$. Opišimo kružnicu k(A, b) koja ima centar u A i radijus b.



Neka su D i E presječne tačke kružnice i prave AB. Tada, prema osobini potencije tačke u odnosu na kružnicu vrijedi:

Sl.2.122.

$$\overline{BE}\cdot\overline{BD}=\overline{BC}^2 \Rightarrow (c-b)(c+b)=a^2$$
$$\Rightarrow c^2-b^2=a^2$$
$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2.$$

2.259. Kako je stranica c najveća, to je dovoljno ispitati da li vrijedi $c^2=a^2+b^2$. U slučaju da jednakost vrijedi, trougao je pravougli (prema Pitagorinoj teoremi), a ako jednakost ne vrijedi, tada se radi o trouglu koji nije pravougli.
Ako je $a^2+b^2<c^2$, trougao je oštrougli, a ako vrijedi $a^2+b^2>c^2$, tada je trougao tupougli sa tupim uglom u vrhu C.

Kako vrijedi: $a^2+b^2=16+169=185<225=c^2$, to je posmatrani trougao oštrougli.

2.260. Ako duž a podijelimo na dva dijela x i a-x, tako da vrijedi

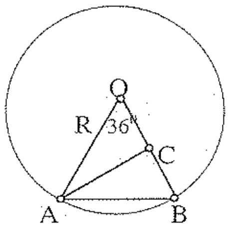
$$a:x = x:(a-x),$$ kažemo da je duž a podijeljena po zlatnom presjeku.

Pokažimo da je stranica pravilnog desetougla jednaka većem dijelu radijusa podijeljenog po zlatnom presjeku. Trougao ΔAOB je jednakokraki sa osnovicom $\overline{AB}=a_{10}$ i krakom koji je jednak radijusu opisane kružnice R.

Ugao pri vrhu ovog trougla je 36^0.

Neka je AC simetrala ugla kod vrha A.

$\overline{AB}=a_{10}$

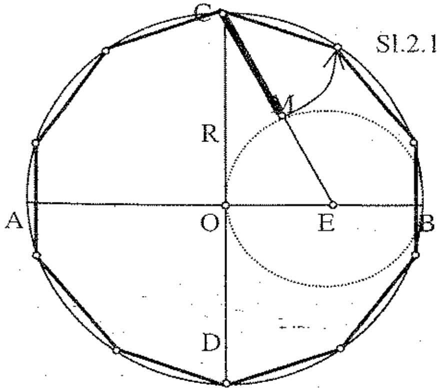


Sl.2.123.

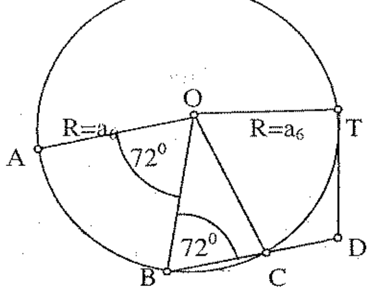
Tada su dva jednakokraka trougla: ΔAOB i ΔABC slična (Zašto?). Iz ove sličnosti slijedi: $\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{BC}$, odnosno,

$$R : a_{10} = a_{10} : (R-a_{10}).$$

2.261. Posmatrajmo kružnicu k(O, R). Neka su AB i CD dva normalna prečnika ove kružnice. Neka je E središte duži OB i središte kružnice $k\left(E, \frac{R}{2}\right)$. Neka je M tačka presjeka ove kružnice i duži CE. Tada je stranica pravilnog desetougla jednaka duži CM. Nanošenjem duži CM iz tačke C na kružnicu dobijamo vrhove traženog pravilnog desetougla (Sl. 2.124.).



Sl.2.124.



Sl.2.125.

2.262. Neka je $\overline{AB}=a_5$ stranica pravilnog petougla upisanog u kružnicu radijusa R (Sl.2.125.). Ugao <AOB jednak je 72^0 (Zašto?). Neka je C tačka na kružnici takva da je BC paralelno sa AO. Tada je ugao <OBC jednak uglu <AOB=72^0 (Naizmjenični uglovi!). Zato je ugao <BOC jednak 36^0, što znači da je BC stranica pravilnog desetougla upisanog u kružnicu radijusa R ($\overline{BC}=a_{10}$). Neka je D tačka u kojoj paralela kroz O sa AB siječe pravu BC. Tada je $\overline{OD}=\overline{AB}=a_5$. Ako je T dodirna tačka tangente na posmatranu kružnicu povučene iz tačke D, tada je ΔDOT pravougli sa hipotenuzom $\overline{OD}=\overline{AB}=a_5$. Prema osobini potencije tačke u odnosu na kružnicu vrijedi: $\overline{DB}\cdot\overline{DC}=\overline{DT}^2$, odnosno, $R\cdot(R-a_{10})=\overline{DT}^2$.

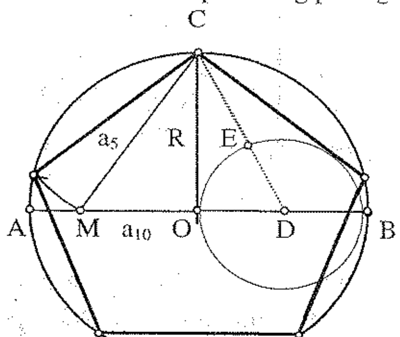
Gornja jednakost znači da je $\overline{DT}=a_{10}$. (Vidi zadatak 2.260.).

Prema Pitagorinoj teoremi, primijenjenoj na pravougli ΔDOT, vrijedi:

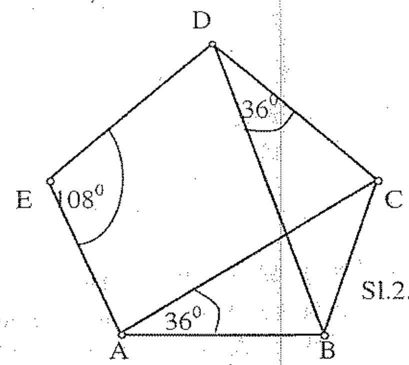
$$\overline{OD}^2=\overline{DT}^2+\overline{OT}^2 \Rightarrow a_5^2 = a_{10}^2+a_6^2.$$

2.263. Neka je k(O, R) data kružnica i AB jedan prečnik ove kružnice. Neka je $\overline{OC}=R$ radijus date kružnice koji je normalan na prečnik AB. Ako je D središte duži OB, tada je ΔOCD pravougli sa katetama R i $\frac{R}{2}$ i hipotenuzom $\overline{CD}=\overline{CE}+\frac{R}{2}$.

Prema zadatku 2.261. je $\overline{CE}=a_{10}$. Ako na prečniku AB odaberemo tačku M tako da bude $\overline{DM}=\overline{DC}$, tada je $\overline{OM}=a_{10}$. Iz pravouglog ΔOMC, prema prethodnom zadatku, dobija se da je $\overline{CM}=a_5$. Nanoseći duž CM iz tačke C na kružnicu dobivamo vrhove pravilnog petougla (Sl.2.126.).



Sl.2.126.



Sl.2.127.

2.264. Neka su AC i BD dijagonale pravilnog petougla ABCDE. Neka je M presječna tačka posmatranih dijagonala. Kako je

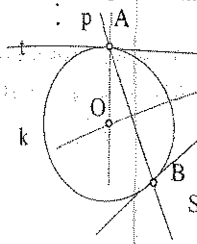
<ABM=<ABC - <CBD=$108^0-36^0=72^0$, to je i ugao <AMB=72^0 što znači da je ΔABM jednakokraki i AM=AB. I ΔBMC je jednakokraki sa uglom pri vrhu od 72^0. Jednakokraki trouglovi ΔABC i ΔBMC su slični, pa iz odnosa njihovih stranica imamo:

$\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{BC}:\overline{MC} \Rightarrow \overline{AC}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{MC} \Rightarrow \overline{AC}:\overline{AM}=\overline{AM}:\overline{MC}$,
što, po definiciji zlatnog presjeka, znači da tačka M dijeli duž AC po zlatnom presjeku. Nije teško zaključiti da je M zlatni presjek i dijagonale BD.

2.265. Analiza: Koristimo sliku i oznake iz prethodnog zadatka. Neka je dijagonala AC jednaka datoj duži m. Podjelom duži AC po zlatnom presjeku određujemo tačku M. U prethodnom zadatku je dokazano da je AM=AB, pa je AM duž koja je jednaka stranici traženog pravilnog petougla. Kako je AM=MD (Zašto?), to je vrh D na presjeku kružnica sa radijusom AM čija su središta tačka C, odnosno M. Na analogan način određujemo položaj vrhova B, D i E.

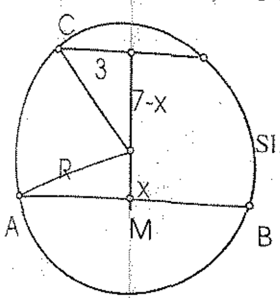
2.266. Uputa: Središta stranica određuju vrhove pravilnog petougla oko koga možemo opisati kružnica. Tangente na ovu kružnicu u njegovim vrhovima sijeku se u vrhovima traženog pravilnog petougla. Izvesti konstrukciju i izvršiti dokaz.

2.267. Neka je data tačka P, prava p i A data tačka na pravoj p. Odredimo tačku B na pravoj p tako da bude PB=PA. Središte tražene kružnice nalazi se na simetrali duži AB. Kako je A didirna tačka tražene kružnice i tangente iz tačke P, to se središte tražene kružnice nalazi i na normali na tangentu u tački A. Dakle, O se nalazi na presjeku spomenute simetrale i normale.

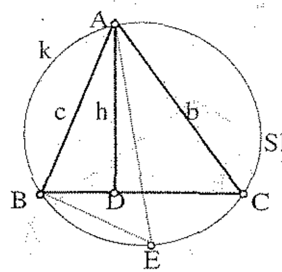


Sl.2.128.

2.268. Iz pravouglih trouglova ΔAOM i ΔCON, primjenom Pitagorine teoreme, dobije se x=3, odnosno, R=5 cm. (Sl.2.129.).



Sl.2.129.



Sl.21.130.

2.269. Neka je ΔABC dati trougao upisan u kružnicu k (Sl.2.130.). Neka je AE prečnik kružnice,a $\overline{AD}=h_a$ visina trougla koja odgovara stranici a. Pravougli trouglovi ΔACD i ΔABE su slični (obodni uglovi nad tetivom su jednaki), pa za njihove stranice vrijedi :

$$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AD}:\overline{AC} \Rightarrow c:2R=h:B \Rightarrow bc=2rh.$$

3. SKUP KOMPLEKSNIH BROJEVA (C)

3.1.a) 9i b) 34i c) 21i d) 31i **3.2.**a) 24i b) 6i c) 34i d) 17i
3.3.a) -3 b) 1 c) -1 d) -4 **3.4.**a) 0 b) 18 c) 10 d) 10
3.5.a) -4i b) i c) i d) -i **3.6.**a) -5+5i b) -i c) 6i d) 15i
3.7.a) i b) 1 c) -i d) i
3.8.a) $i^{111}=i^{108+3}=i^{4\cdot27+3}=i^{4\cdot27}i^3=(i^4)^{27}(-i)=1^{27}(-i)=-i$ b) $i^{233}=i^{4\cdot58+1}=i$ c) 1 d) -i
3.9.a) 15 b) 0 c) -255 d) 0 **3.10.**a) 12 b) -33 c) 88 d) -11
3.11.a) 0 b) 56 c) -1 d) 57 **3.12.**a) 2 b) -36 c) -6 d) 37
3.13.a) Rez=2, Imz=5 b) Rez=-7, Imz=4
c) Rez = -1, Imz=-1 d) Rez= 22, Imz=-5
3.14.a) Rez=0,2 , Imz=3 b) Rez=-0,7 , Imz=2,4
c) Rez= -0,1, Imz=-2,5 d) Rez=0 , Imz=-0,88
3.15.a) $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z=\frac{4}{5}$ b) $\operatorname{Re} z=-\frac{5}{6}, \operatorname{Im} z=8$
c) $\operatorname{Re} z=\frac{15}{12}, \operatorname{Im} z=-\frac{15}{7}$ d) $\operatorname{Re} z=\frac{8}{5}, \operatorname{Im} z=-\frac{12}{5}$
3.16.a) $i^{4000}+i^{4001}+i^{4003}+i^{4004}=i^{4000}(1+i+i^3+i^4)=1(1+i-i+1)=2$ b) 0
3.17.a) 2i b) 5i c) 10i d) 16i **3.18.**a) 5i b) 6i
3.19. $2\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{3}$ d) $-12\sqrt{2}$ **3.20**.a) $20i\sqrt{3}$ b) $2i\sqrt{2}$
3.21.a) $i^{4n+5}=i^{4n}i^5=(i^4)^n i=1^n i=i$ b) $i^{4n-2}=i^{4n}i^{-2}=i^{-2}=(i^2)^{-1}=(-1)^{-1}=-1$

3.1. Jednakost dva kompleksna broja

3.22.a) x=7 b) x=0 c) x=1 **3.23.**a) x=7 b) x=-5 c) x=1/3
3.24. x=31, y=9. **3.25.**a) x=2, y=-3 b) x=10, y=-4 c) x=3, y=-4
3.26.a) x=1, y=2 b) x=2, y=-1 **3.27.**a) x=1, y=i b) x=i, y=1-i .
3.28. Rješavajući sistem po x i y dobije se $x=\frac{1}{2}, y=\frac{i}{2}$.

3.2. Operacije u skupu kompleksnih brojeva C

3.29.a) z=1+2i b) z=9+13i c) z=6+2i
3.30.a) z=14-3i b) z=-5-2i c) z=14-3i
3.31.a) z=-5+8i b) z=2-6i c) z=-4
3.32.a) z=(a+c)+(b+d)i b) z=(a+b+1)+(a-b+1)i c) z=2a+b+(a+x)i
3.33.a) z=-9i b) z=-52i c) z=-2+6i **3.34.**a) z=7-7i b) z=19+i c) z=8-3i
3.35.a) z=-12-3i b) z=-5+4i c) z=2+17i

3.36.a) $z=-4+13i$ b) $z=4-124i$ c) $6+3i$
3.37.a) $z_1z_2=-1+i$ b) $z_1z_2=4-4i$ c) $z_1z_2=-3+15i$
3.38.a) $z_1z_2=-8+12i$ b) $z_1z_2=-15+15i$ c) $z_1z_2=2$
3.39.a) $z_1z_2=1-5i$ b) $z_1z_2=11-2i$ c) $z_1z_2=40-10i$
3.40.a) $z_1z_2=-23-21i$ b) $z_1z_2=52i$ c) $z_1z_2=17+71i$
3.41.a) $11-13i$ b) $1+7i$ c) $5+3i$
3.42.a) $-12+5i$ b) $27-23i$ c) $13-39i$
3.43.a) $-\frac{7}{2}+\frac{11}{2}i$ b) $-\frac{37}{105}+\frac{3}{175}i$ **3.44**. a) 25   b) -4
3.45.a) $2i$ b) $-2i$ c) $21+20i$ d) $-7+24i$
3.46.a) $-28-96i$ b) $-\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$ c) $\frac{51}{1225}-\frac{4}{35}i$ d) $-\frac{1196}{2025}-\frac{16}{45}i$
3.47.a) $z^3=-125i$ b) $z^3=2+2i$ c) $z^3=62-9i$ d) $z=-92-65i$
3.48. $f(1-i)=2(1-i)^2-3(1-i)+11+i = 2(1-2i-1)-3+3i+11+i = -4i+8+4i = 8$.
3.49. $f(3-i)=(3-i)^3-(3-i)^2+11(3-i)+8+2i=27-27i-9+i-(9-6i-1)+33-11i+8+2i = 51-29i$.
3.50. $f(3-2i) = 29+8i$.   **3.51.** i
3.52.a) $Rez=-49$, $Imz=-14$ b) $Rez=0$, $Imz=34$ c) $Rez=-12$, $Imz=-12$
3.53.a) $Rez=\frac{13}{2}$, $Imz=-4$ b) $Rez=\frac{14}{3}$, $Imz=-\frac{67}{15}$ c) $Rez=\frac{6}{5}$, $Imz=-\frac{39}{100}$

3.3. Konjugirano-kompleksni brojevi

3.54.a) $\bar{z}=23$ b) $\bar{z}=62i$ c) $\bar{z}=-3-8i$ d) $\bar{z}=-15+9i$
3.55.a) $\bar{z}=2-3i$ b) $\bar{z}=-6-2i$ c) $\bar{z}=3+99i$ d) $\bar{z}=24+55i$
3.56.a) 10   b) $6i$ c) $15+3i$ d) $15-3i$ **3.57**.a) 2   b) 4   c) $-2-2i$ d) $4i$
3.58.a) $m=9$ b) $m=1$ c) $m=0,5$
3.59. Traženi brojevi su rješenje sistema jednačina

$$\begin{aligned} 2m-2n&=m-1 & m-2n&=-1 & & \\ m-2n&=n-4 \quad\Rightarrow & m-3n&=-4 \quad\Rightarrow & m&=5,\ n=3. \end{aligned}$$

3.60.a) Neka je $z=x+yi$. Tada vrijedi:

$$z+\bar{z}=x+y+x-yi=2x \quad i \quad z\cdot\bar{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2-(yi)^2=x^2+y^2.$$

3.61. Neka je $z_1=a+bi$ i $z_2=c+di$. Tada je:

a) $$\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)i=$$
$$=a-bi+c-di=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

c) $$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=(ac-bd)-(ad+bc)i=$$
$$=ac-bd-adi-bci=ac+bdi^2-adi-bci=c(a-bi)-(a-bi)di=$$
$$=(a-bi)(c-di)=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}.$$

3.4. Dijeljenje kompleksnih brojeva

3.62.a) $4-4i$ b) $-i$ c) $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$

3.63.a) $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-i}{-3+i}=\frac{2-i}{-3+i}\cdot\frac{-3-i}{-3-i}=\frac{(2-i)(-3-i)}{(-3)^2-i^2}=\frac{-6+3i-2i+i^2}{9-(-1)}=$$
$$=\frac{-6+3i-2i+i^2}{9-(-1)}=\frac{-7+i}{10}=-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}i.$$
b) $\frac{26+7i}{29}$ c) $\frac{-20-17i}{13}$

3.64.a) i b) $\frac{2+i}{5}$ c) $\frac{-2-3i}{13}$ d) $\frac{1-i}{2}$
3.65.a) $\frac{1+i}{2}$ b) $\frac{2-5i}{3}$ c) $\frac{-7-22i}{41}$ d) $\frac{11-3i}{10}$ **3.66**.a) 1   b) $\frac{-3+3i}{2}$ c) $-i$
3.67.a) $Re\,z=16$, $Im\,z=0$ b) $Rez=-\frac{18}{25}$, $Imz=\frac{23}{50}$.
c) $Rez=\frac{1}{2}$, $Imz=-\frac{1}{2}$.   d) $Re\,z=0$, $Im\,z=\frac{1}{2}$.

3.68. Iz uslova $(x+yi)(3+i)=5+6i$, korištenjem definicije jednakosti dva kompleksna broja i rješavanjem nastalog sistema jednačina dobije se traženi kompleksni broj: $z=\frac{21}{10}+\frac{13}{10}i$.

3.69.a) $$z=\frac{-i}{6-i}=\frac{-i}{6-i}\cdot\frac{6+i}{6+i}=\frac{-6i-i^2}{6^2-i^2}=\frac{1-6i}{36+1}=\frac{1-6i}{37}=\frac{1}{37}-\frac{6}{37}i.$$
b) $z=\frac{4}{5}+\frac{8}{5}i$ c) $z=\frac{11}{26}+\frac{55}{26}i$.

3.70.a) $z=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ b) $z=i$ c) $z=\frac{2}{13}$ **3.71**. $z=-1-\frac{i}{2}$.
3.72.a) $\frac{1}{2}$ b) $3-7i$ c) $-7+i$ **3.73**.a) $\frac{2-i}{1024}$ b) -2^{250} c) -2^{450}
3.74. $f(1-i) = 2+14i$, $f(2+3i) = 19-20i$.
3.75.* $(x+yi)^2 = a+bi \Rightarrow x^2+2xyi-y^2 = a+bi \Rightarrow x^2-y^2=a,\ 2xy=b$.
$(x-yi)^2= x^2-2xyi-y^2 = (x^2-y^2)-2xyi = a-bi$.

3.76.a) Neka je $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$. Tada je $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)}=$

$$=\overline{\left(\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\right)}=\frac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)}=\frac{a-bi}{c-di}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

b) $\overline{z^{-1}}=\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{\bar{1}}{\bar{z}}=\frac{1}{\bar{z}}=(\bar{z})^{-1}$.

3.77.a) $x^2+1=(x-i)(x+i)$ b) $x^2+25=(x-5i)(x+5i)$

c) $x^2+121=(x+11i)(x-11i)$ d) $(x+16i)(x-16i)$

3.78.a) $(x+2i)(x-2i)$ b) $(x+3i)(x-3i)$

c) $(3x+12i)(3x-12i)$ d) $(2x+3i)(2x-3i)$

3.79.a) $(a-bi)(a+bi)$ b) $a^2+4b^2=(a-2bi)(a+2bi)$

c) $(3a-4bi)(3a+4bi)$ d) $\left(\sqrt{a}-i\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+i\sqrt{b}\right)$

3.5. Modul (apsolutna vrijednost) kompleksnog broja

3.80.a) $|z|=12$ b) $|z|=8$ c) $|z|=1$ d) $|z|=10$

3.81.a) $|z|=5$ b) $|z|=10$ c) $|z|=13$ d) $|z|=29$

3.82.a) $|z|=10$ b) $|z|=13$ c) $|z|=10\sqrt{2}$ d) $|z|=2\sqrt{13}$

3.83.a) $|z|=1$ b) $|z|=1$ c) $|z|=1$ d) $|z|=1/5$

3.84.a) $|z|=29$ b) 29 c) 42 d) 40

3.85. Neka je $z=x+yi$. Tada vrijedi:

a) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-x)^2+(-y)^2}=|-x-yi|=|-(x+yi)|=|-z|$

d) $|\bar{z}|=|x-yi|=\sqrt{x^2+(-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=|x+yi|=|\bar{z}|$.

3.86.a) 5 b) 13 c) $8\sqrt{5}$ d) 65

3.87.a) $\sqrt{241}$ b) $\sqrt{409}$ c) $\sqrt{409}$ d) 150

3.88. $\sqrt{377}\approx 19{,}41648..$ **3.89**. $\sqrt{1082}\approx 32{,}8937..$

3.90.a) $|z|=1$ b) $|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $|z|=\dfrac{\sqrt{74}}{32}$ d) $|z|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

3.91.a) Neka je $z=x+yi$. Tada je $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\iff|z|^2=x^2+y^2$

$$\iff |z|^2=(x+yi)(x-yi)\iff |z|^2=z\cdot\bar{z}.$$

b) Neka je $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$. Tada vrijedi: $|z_1\cdot z_2|=|(a+bi)\cdot(c+di)|=$

$$=|(ac-bd)+(bc+ad)i|=\sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}=$$

$$=\sqrt{a^2c^2-2abcd+b^2d^2+b^2c^2+2abcd+a^2d^2}=$$

$$=\sqrt{(a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)d^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}=|z_1|\cdot|z_2|.$$

c) $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{a+bi}{c+di}\right|=\left|\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\right|=\sqrt{\frac{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}}=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

3.92.a) Neka je, prvo, $z_1=1$, $z_2=a+bi$. Tada je $|z_2|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}\geq\sqrt{a^2}=a.$

Dalje je

$$|1+z_2|=\sqrt{|1+z_2|^2}=\sqrt{(1+z_2)(\overline{1+z_2})}=\sqrt{(1+z_2)(1+\overline{z_2})}=\sqrt{1+(z_2+\overline{z_2})+z_2\overline{z_2}}=$$

$$=\sqrt{1+2a|z_2|^2}\leq\sqrt{1+2|z_2|+|z_2|^2}=\sqrt{(1+|z_2|)^2}=1+|z_2|.$$

Koristeći, sada, dobiveni rezultat, nastavimo dalje razmatranje za ma koja dva kompleksna broja z_1 i z_2.

$$|z_1+z_2|=\left|z_1\left(1+\frac{z_2}{z_1}\right)\right|=|z_1|\cdot\left|1+\frac{z_2}{z_1}\right|\leq|z_1|\cdot\left(1+\left|\frac{z_2}{z_1}\right|\right)=|z_1|+|z_1|\cdot\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=|z_1|+|z_1|\cdot\frac{|z_2|}{|z_1|}=|z_1|+|z_2|$$

b) Kako je $z_1=z_2+(z_1-z_2)$, to je $|z_1|=|z_2+(z_1-z_2)|$ => $|z_1|\leq|z_2|+|z_1-z_2|$

=> $|z_1|-|z_2|\leq|z_1-z_2|$.

3.93. $|z|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$. $2|f(z)|=2\left|\dfrac{7-z}{1-z^2}\right|=2\cdot\dfrac{|7-z|}{|1-z^2|}=2\cdot\dfrac{|7-(1+2i)|}{|1-(1+2i)^2|}=$

$$=2\cdot\frac{|6-2i|}{|1-(1+4i-4)|}=\frac{2|6-2i|}{|-4+4i|}=\frac{2\sqrt{36+4}}{\sqrt{16+16}}=\frac{2\sqrt{40}}{\sqrt{32}}=\frac{4\sqrt{10}}{4\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{10}{2}}=\sqrt{5}=|z|$$

3.94.a) $\operatorname{Re}z=\dfrac{1}{4}$, $\operatorname{Im}z=\dfrac{3}{4}$, $|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ *b*) $\operatorname{Re}z=2$, $\operatorname{Im}z=\dfrac{5}{2}$, $|z|=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$

c) $\operatorname{Re}z=\dfrac{13}{6}$, $\operatorname{Im}z=\dfrac{19}{6}$, $|z|=\dfrac{\sqrt{530}}{6}$. **3.95**.a) $z=3+4i$ b) $z=i$.

3.96.a) Koristeći date uvjete dolazimo do sistema jednačina: $-x+2y-3=0$, $3x+2y+1=0$ čije rješenje daje traženi broj z. $z=-1+i$. b) $z=2+i$.

3.97. $(1+i)^4-(1-i)^4=(1+2i+i^2)^2-(1-2i+i^2)=(2i)^2-(-2i)^2=-4-(-4)=-4+4=0\in R$.

3.98. $$=\frac{(2+18i)(-18-2i)}{(-18+2i)(-18-2i)}=\frac{-36-4i-324i+36}{324+4}=\frac{-328i}{328}=-i.$$

3.99. Uputa: Uzeti da je $z=x+yi$ i uvrstiti u jednačinu. Koristiti definiciju jednakosti dva kompleksna broja. a) $z=2+i$ b) $z=3+2i$

3.100. $(1+i)^{4n}=[(1+i)^4]^n=[((1+i)^2)^2]^n=[(1+2i-1)^2]^n=[(2i)^2]^n=[-4]^n\in R$.

3.101. $(1-i)^{4n+2}=(1-i)^{4n}(1-i)^2=(1-2i-1)^{2n}(1-2i-1)=(-2i)^{2n}(-2i)=(-4)^n(-2i)=$
$=-2(-4)^n i\notin R$.

3.102.a) $z=i^n$ 1) Ako je $n=4k$, $k\in N$, $z=1$,

2) Ako je $n=4k+1$, $k\in N$, $z=i$,

3) Ako je $n=4k+2$, $k\in N$, $z=-1$, 4) Ako je $n=4k+3$, $k\in N$, $z=-i$.

b) $z=\left(\dfrac{10}{i}\right)^n=(-10i)^n=(-10)^n i^n$.

1) Ako je $n=4k$, $k\in N$, $\operatorname{Re}z=10^n$, $\operatorname{Im}z=0$

2) Ako je $n=4k+1$, $k\in N$, $\operatorname{Re}z=0$, $\operatorname{Im}z=-10^n$

3) Ako je $n=4k+2$, $k\in N$, $\operatorname{Re}z=-10^n$, $\operatorname{Im}z=0$

4) Ako je n=4k+3, k∈N, Rez=0, Imz=10^n.

c) $z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n=\left[\dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right]^n=\left(\dfrac{1-2i-1}{1+1}\right)^n=(-i)^n=(-1)^n i^n$.

1) Ako je n=4k, k∈N, Rez = 1, Imz = 0 , 2) Ako je n=4k+1, k∈N, Rez = 0, Imz = -1

3) Ako je n=4k+2, k∈N, Rez = -1, Imz = 0

4) Ako je n=4k+3, k∈N, Rez = 0, Imz = 1

3.103.*a) z=11-2i, Rez=11, Imz=-2.

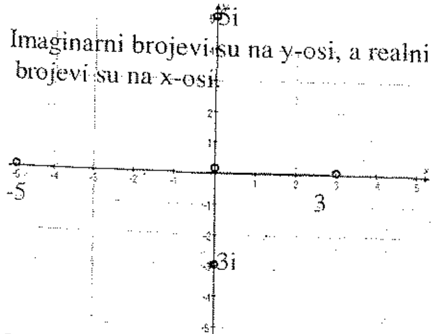
b) $z=-2i^{n+1}$ 1) Ako je n=4k, k∈N, Rez = 0, Imz = -2 ,
2) Ako je n=4k+1, k∈N, Rez = 2, Imz = 0 ,
3) Ako je n=4k+2, k∈N, Rez = 0, Imz = 2 ,
4) Ako je n=4k+3, k∈N, Rez = -2, Imz = 0 .

c) z=-1

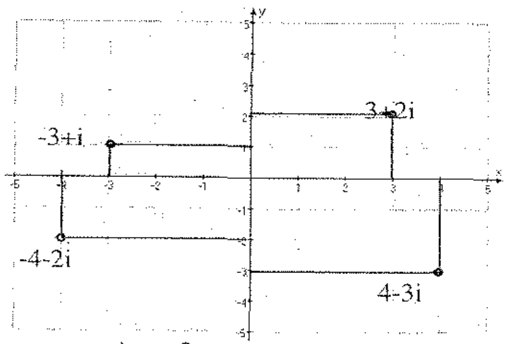
3.6. Predstavljanje kompleksnih brojeva u ravni. Kompleksna ravan

3.104.

Imaginarni brojevi su na y-osi, a realni brojevi su na x-osi



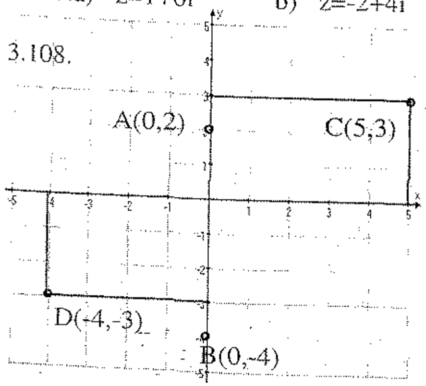
3.105.



3.106.a) z=3 b) z=3i c) z=-2 d) z=-i

3.107.a) z=1+6i b) z=-2+4i c) z=-3-5i d) z=5-2i

3.108.



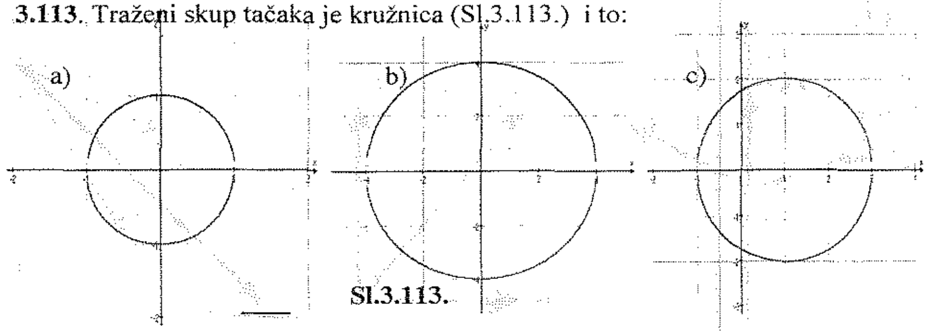
3.109. $z_1=3+5i$, $z_2=2-3i$, $z_1+z_2=5+2i$, $z_1-z_2=1+8i$, $z_1z_2=21+i$, $z_1:z_2=(-7+19i)/13$.

3.110. $z_1=2+5i, z_2=7-i, |z_1+z_2|=\sqrt{117}$

3.111. $|z_1-z_2|=5$

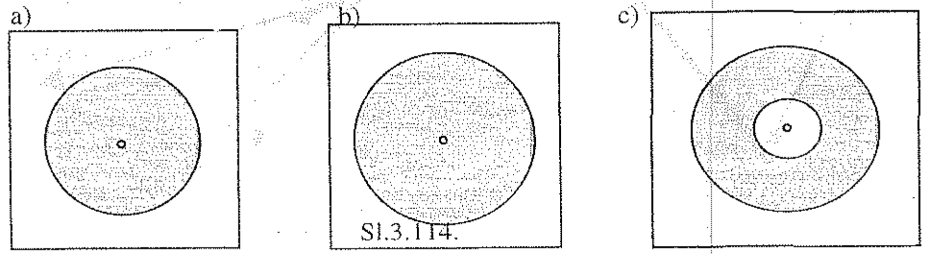
3.112. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{\sqrt{290}}{29}$

3.113. Traženi skup tačaka je kružnica (Sl.3.113.) i to:



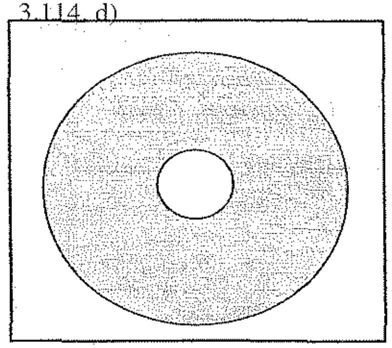
Sl.3.113.

3.114.a) Tražena figura je krug radijusa r=3 sa centrom u koordinatnom početku bez obodne kružnice.
b) Krug radijusa r=5 sa središtem u koordinatnom početku.
c) Figura je kružni prsten radijusa R=3 i r=1
d) Figura je kružni prsten radijusa R=7, r=2. (Sl.3.114.a) b) c) d)).

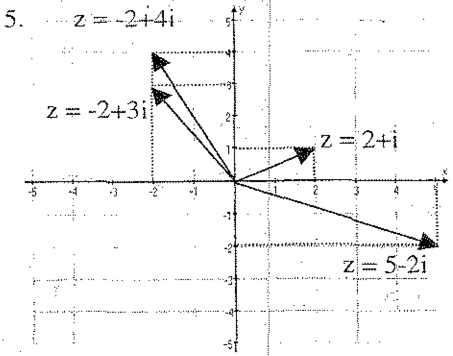


Sl.3.114.

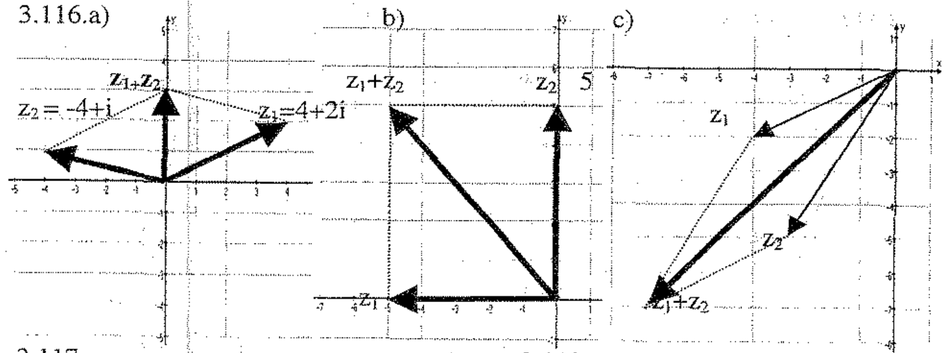
3.114. d)



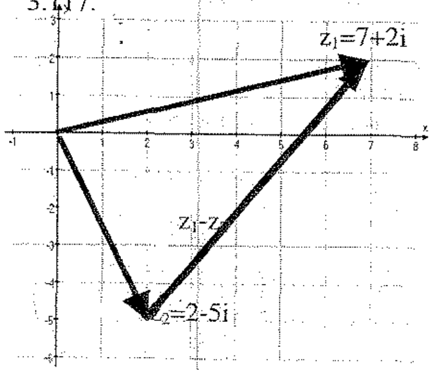
3.115.



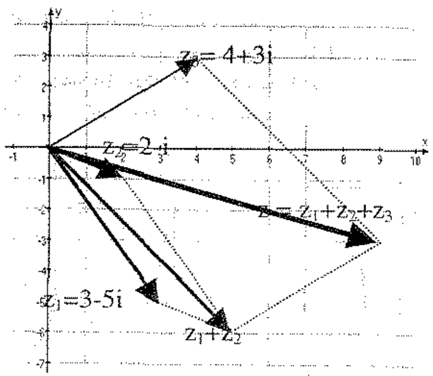
3.116.a)



3.117.



3.118.



3.7. Kompleksni brojevi - razni zadaci

3.121.a) $\sqrt{2}$ b) $i\sqrt{a}$ c) $\frac{a^2-b}{a^2+b}+\frac{2a\sqrt{b}}{a^2+b}i.$

3.122.a) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ b) Uputa: $a^6=\left(a^2\right)^3$. Rezultat:-2.

c) Uputa: Uzeti da je z=x+yi i kvadriranjem odrediti x i y. Rezultat: ±(3+2i)

d) ± (1+2i)

3.123. x=-2, y=-2. **3.124.***a) $-\frac{1}{4}$ b) $8-24i\sqrt{7}$ c) $-\frac{3}{2}i$

3.125.* a) -1 b) 1 c) $\sqrt{i}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$ d) $\sqrt{-i}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$

3.126. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6+\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^6=\left[\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2\right]^3+\left[\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^3=$

$$=\left[\frac{2+2i\sqrt{3}}{4}\right]^3+\left[\frac{2-2i\sqrt{3}}{4}\right]^3=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^3}{8}+\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^3}{8}=$$

$$=\frac{2\left[\left(1+i\sqrt{3}\right)^2-\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)+\left(1+i\sqrt{3}\right)^2\right]}{8}=\frac{-2+2i\sqrt{3}-1-3-2-2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-8}{4}=-2$$

3.127.* 72+72i

3.128. $\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{12}-\left(1+i\sqrt{3}\right)^6}{(-1+i)^{12}}=\frac{\left(-2-2i\sqrt{3}\right)^6-\left(1+i\sqrt{3}\right)^6}{\left[(-1+i)^2\right]^6}=\frac{(-2i)^6\left(1+i\sqrt{3}\right)^6-\left(1+i\sqrt{3}\right)^6}{(-2i)^6}=$

$$=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^6\left[(-2)^6-1\right]}{64^6}=\frac{\left(-2+2i\sqrt{3}\right)^3(64-1)}{-64}=\frac{-8\left(1-i\sqrt{3}\right)^3\cdot 63}{-64}=\frac{\left(1-3i\sqrt{3}-9+3i\sqrt{3}\right)\cdot 63}{8}=-63.$$

3.129.a) $x^3=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^3}{8}=\frac{-1-3i\sqrt{3}+9+3i\sqrt{3}}{8}=1.$

b) $y^3=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3}{8}=\frac{-1+3i\sqrt{3}+9-3i\sqrt{3}}{8}=\frac{8}{8}=1.$

c) $x^2=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^2}{4}=\frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=y.$

3.130. Neka je z = x+yi. Tada se dati uvjet može pisati ovako:

$x-yi=(x+yi)^2 \Leftrightarrow x-yi=x^2-y^2+2xyi \Leftrightarrow x=x^2-y^2,\ -y=2xy \Leftrightarrow y(2x+1)=0,\ x=x^2-y^2$

$\Leftrightarrow$ y=0, (x=0 ili x=1) ili $x=-\frac{1}{2}$, $y^2=\frac{3}{4}$.

Dobili smo četiri kompleksna broja koji ispunjavaju postavljeni uvjet i to:

$$z=0,\ z=1,\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

3.131.* $1+z+z^2=0 \Leftrightarrow z+z^2=-1$.

$1+z+z^2=0 \Leftrightarrow z+z^2+z^3=0 \Leftrightarrow z^3=-(z+z^2)=-(-1)=1.$

3.132.*a) Kvadriranjem formule dobivamo:

$$\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}=\left(\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}\right)^2$$

$$a+bi+2\sqrt{(a+bi)(a-bi)}+a-bi=2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)$$

$$2a+2\sqrt{a^2+b^2}=2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right) \Leftrightarrow 2\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)=2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right).$$

3.133. $\frac{x-1}{3+i}+\frac{y-1}{3-i}=i \Leftrightarrow (x-1)(3-i)+(y-1)(3+i)=i(3+i)(3-i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+3y-6-(x-y)i=10i \Leftrightarrow 3x+3y-6=0 \wedge -(x-y)=10 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ x+y=6 \wedge x-y=-10 \Leftrightarrow x=-4 \wedge y=6.$$

3.134. $\left|\dfrac{16z+1}{4\bar z}\right|=4 \Leftrightarrow \dfrac{|16z+1|}{|4\bar z|}=4 \Leftrightarrow |16z+1|=16|\bar z| \Leftrightarrow |16z+1|=16|z|$

$$\Leftrightarrow |16x+1+16yi|=16|x+yi| \Leftrightarrow \sqrt{(16x+1)^2+(16y)^2}=16\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow (16x+1)^2+(16y)^2=256\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow 32x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{32}.$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{2z}{\bar z}\right)=1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{2z^2}{z\bar z}\right)=1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{2x^2-2y^2+4xy}{x^2+y^2}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2y^2}{x^2+y^2}=1$$

$\Leftrightarrow$ $x^2=3y^2$. Rezultat: $z=-\dfrac{1}{32}-\dfrac{1}{32}i,\ z=-\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{32}i.$

3.135.*a) Neka je $a = x+yi$. Tada iz uvjeta $|a|=1$ slijedi da je $x^2+y^2=1$. Dalje vrijedi:

$$\bar a = x-yi=\frac{x-yi}{1}=\frac{(x-yi)(x+yi)}{x+yi}=\frac{x^2+y^2}{a}=\frac{1}{a}.$$

Analogno dokazujemo preostale dvije tvrdnje.

b) $|ab+bc+ca|=|abc|\cdot\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right|=|a|\cdot|b|\cdot|c|\cdot|\bar a+\bar b+\bar c|=|\overline{a+b+c}|=|a+b+c|$

3.136.* Kako je

$$f(n+4)=\left(\frac{1+i}{\sqrt2}\right)^{n+4}+\left(\frac{1-i}{\sqrt2}\right)^{n+4}=\left(\frac{1+i}{\sqrt2}\right)^{4}\left(\frac{1+i}{\sqrt2}\right)^{n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt2}\right)^{4}\left(\frac{1-i}{\sqrt2}\right)^{n}=$$

$$=\left(\frac{2i}{2}\right)^{2}\left(\frac{1+i}{\sqrt2}\right)^{n}+\left(\frac{-2i}{2}\right)^{2}\left(\frac{1-i}{\sqrt2}\right)^{n}=-\left(\frac{1+i}{\sqrt2}\right)^{n}-\left(\frac{1-i}{\sqrt2}\right)^{n}=-f(n).$$

to je $f(n+4)+f(n) = 0$ čime je dokaz kompletiran.

3.137.a) $f(z) = f(z_1) = f(2+3i)= (2+3i)^2 -(3+4i)(2+3i)-1+5i = -5+12i+6-17i-1+5i =0$

b) $\overline{f(z)}=\bar z^2-(3-4i)\bar z-1-5i$; $f(\bar z)=\bar z^2-(3+4i)\bar z-1+5i$, $\overline{f(z)}\neq f(\bar z)$.

c) $\overline{f(z_1)}=0$, $f(\overline{z_1})=-24-6i$.

3.138. Koristimo ranije dokazanu osobinu kompleksnog broja $z\bar z=|z|^2$ i dokažimo da je $z=\bar z$, što znači da je z realan broj.

Ako pretpostavimo da je $z=\bar z$ dolazimo do slijedećih relacija:

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\frac{\bar z_1+\bar z_2}{1+\bar z_1\cdot\bar z_2} \Leftrightarrow z_1+z_2+z_1\cdot\bar z_1\cdot\bar z_2+z_2\cdot\bar z_1\cdot\bar z_2=\bar z_1+\bar z_2+\bar z_1\cdot z_1\cdot z_2+\bar z_2\cdot z_1\cdot z_2$$

$$\Leftrightarrow z_1+z_2+\bar z_2+\bar z_1=\bar z_1+\bar z_2+z_2+z_1.$$

Kako posljednja jednakost uvijek vrijedi, to je broj z jednak svom konjugirano kompleksnom broju, pa je realan. Ovim je dokaz kompletiran.

3.139.* Vrijedi :

$$|x+y+z|^2=(x+y+z)(\bar x+\bar y+\bar z)=x\bar x+x\bar y+x\bar z+y\bar x+y\bar y+y\bar z+z\bar x+z\bar y+z\bar z$$

Kako je $x\bar x=y\bar y=z\bar z=1$, to, dalje, vrijedi:

$$|x+y+z|^2=3+x\bar y+x\bar z+y\bar x+y\bar z+z\bar x+z\bar y=3+x(\bar y+\bar z)+y(\bar z+\bar x)+z(\bar x+\bar y).$$

$$|xy+yz+xz|^2=(xy+yz+xz)\left(\overline{xy}+\overline{yz}+\overline{xz}\right)=$$

$$=xy\overline{xy}+xy\overline{yz}+xy\overline{xz}+yz\overline{xy}+yz\overline{yz}+yz\overline{xz}+xz\overline{xy}+xz\overline{yz}+xz\overline{xz}=$$

$$=1+x\bar z+y\bar z+z\bar x+1+y\bar x+z\bar y+x\bar y+1=3+x(\bar y+\bar z)+y(\bar x+\bar z)+z(\bar x+\bar y).$$

Vidimo da vrijedi

$$|x+y+z|^2=|xy+yz+zx|^2,\ \text{odnosno}\ \ |x+y+z|=|xy+yz+zx|.$$

3.140. Jasno je da vrijedi:

$$a+b-ab+1=0 \Leftrightarrow \overline{a+b-ab+1}=\bar 0 \Leftrightarrow \bar a+\bar b-\overline{ab}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac1a+\frac1b-\frac1{ab}+1=0 \Leftrightarrow ab\left(\frac1a+\frac1b-\frac1{ab}+1\right)=0 \Leftrightarrow a+b+ab-1=0.$$

4. KVADRATNE JEDNAČINE (JEDNADŽBE)

4.1.a) $x=-3$ b) $x=3$ c) $x=11$ d) $x=\dfrac{17}{6}$

4.2.a) $3x^2+x+1=0$ b) $5x^2+2x-31=0$ c) $x^2-13x-7=0$

4.3.a) $x^2-6x-9=0$ b) $3x^2-6x-1=0$ c) $x^2-5x-16=0$

4.4.a) $5x^2$ b) $-82x^2$ c) $2020x^2$ **4.5.** a) $5x^2$ b) $-5x^2$ c) $189x^2$

4.6.a) $44x$ b) $34x$ c) $-177x$ **4.7.** a) $-37x$ b) $-2x$ c) $52x$

4.8.a) 55 b) -119 c) 2000 **4.9.** a) 10 b) -22 c) 10

4.10.a) -3 b) 2 c) -7 **4.11.**a) 1 b) 8 c) -4

4.12.a) -11 b) 113 c) 70 **4.13.**a) 333 b) 6 c) 1240

4.14.a) $a=2, b=-9, c=-45$ b) $a=9, b=6, c=11$ c) $a = -5, b = -13, c = 6$

4.15.a) $a=-1, b=1, c=-5$ b) $a=1, b=-1, c=1$ c) $a=1, b=1, c=2$

4.1. Rješavanje nepotpune kvadratne jednačine (jednadžbe)

4.16.a) $x_{1,2}=0$ b) $x_{1,2}=\pm8$ c) $x_{1,2}=\pm\dfrac{5}{2}$ d) $x_{1,2}=\pm\dfrac{4}{5}$

4.17.a) $x_{1,2}=\pm3i$ b) $x_{1,2}=\pm8i$ c) $x_{1,2}=\pm\dfrac{5}{4}i$ d) $x_{1,2}=\pm\dfrac{4}{3}i$

4.18.a) $x_1=0,\ x_2=-1$ b) $x_1=0,\ x_2=3$ c) $x_1=0,\ x_2=\dfrac{1}{2}$ d) $x_1=0,\ x_2=-\dfrac{1}{3}$

4.19.a) $x_1=3, x_2=-2$ b) $x_1=-3, x_2=5$ c) $x_1=-11, x_2=3$

4.20.a) $x_1=\frac{3}{2}, x_2=\frac{1}{4}$ b) $x_1=\frac{3}{4}, x_2=\frac{5}{2}$ c) $x_1=1, x_2=-4$

4.21.a) $x_1=0, x_2=-1$ b) $x_1=0, x_2=1$ c) $x_1=0, x_2=5$ d) $x_1=0, x_2=-15$

4.22.a) $x_1=0, x_2=-3$ b) $x_1=0, x_2=-\frac{3}{7}$ c) $x_1=0, x_2=-\frac{1}{6}$ d) $x_1=0, x_2=\frac{5}{4}$

4.23.a) $x_1=0, x_2=-3$ b) $x_1=0, x_2=4$ c) $x_1=0, x_2=\frac{11}{84}$ d) $x_1=0, x_2=-\frac{2}{5}$

4.24.a) $x_1=0, x_2=\frac{b}{2a}$, $a\neq0$ b) $x_1=0, x_2=\frac{3n}{m}$, $m\neq0$

c) $x_1=0, x_2=-\frac{2}{a}$, $a\neq0$, $b\neq0$ d) $x_1=0, x_2=\frac{44}{a+b}$, $a+b\neq0$.

4.25.a) Da b) Ne c) Da d) Ne **4.26**.a) Da b) Da c) Da d) Da

4.27.a) Da b) Da c) Ne d) Ne **4.28**.a) Da b) Ne c) Da

4.29.a) $x_{1,2}=\pm\sqrt{7}$ b) $x_{1,2}=\pm2$ c) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{4}$ **4.30**.a) $x_{1,2}=\pm i\sqrt{6}$ b) $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{35}}{5}$

c) $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{322}}{46}$ **4.31**.a) $x_{1,2}=\pm2$ b) $x_1=0, x_2=\frac{10}{3}$

4.32.a) $x_1=0, x_2=\frac{2}{3}$ b) $x_{1,2}=\pm2$ c) $x_1=0, x_2=-\frac{30}{7}$

4.33.a) $x_1=0,\ x_2=-\frac{2}{5}$ b) $x_1=0,\ x_2=-3$

4.34.a) $x_1=0,\ x_2=\frac{b}{2a}, a\neq0$ b) $x_1=0,\ x_2=-\frac{b^2}{a^2}, a\neq0$

c) $x_1=0,\ x_2=24a$ d) $x_1=0,\ x_2=\frac{3m}{m+1}, m\neq-1$

4.35.a) $x_{1,2}=-2$ b) $x_{1,2}=3$ c) $x_{1,2}=-7$ d) $x_{1,2}=8$

4.2. Rješavanje potpune kvadratne jednačine (jednadžbe)

4.36. Do ovog zadatka, kvadratne jednačine smo mogli rješavati i bez formule. Slijedeće kvadratne jednačine, nakon dovođenja na oblik $ax^2+bx+c=0$, rješavamo primjenom formule: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, gdje su a, b i c odgovarajući koeficijenti.

a) $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-48}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{7\pm1}{2}$;

=> $x_1=3, x_2=4$.

b) $x_1=2, x_2=5$ c) $x_1=-3, x_2=1$ d) $x_1=-5, x_2=2$

4.37.a) $x_1=2, x_2=7$ b) $x_1=1, x_2=10$ c) $x_1=3, x_2=8$ d) $x_1=6, x_2=7$

4.38.a) $x_1=-5, x_2=6$ b) $x_1=-6, x_2=5$ c) $x_1=-3, x_2=7$ d) $x_1=-2, x_2=10$

4.39.a) $x_1=-3, x_2=-1$ b) $x_1=-5, x_2=-2$ c) $x_1=-9, x_2=-1$ d) $x_1=-8, x_2=-3$

4.40.a) $x_1=3+5i, x_2=3-5i$ b) $x_1=1-2i, x_2=1+2i$

c) $x_1=-1-i, x_2=-1+i$ d) $x_1=-3-2i, x_2=-3+2i$

4.41.a) $x_1=-5, x_2=7$ b) $x_1=-3, x_2=-5$ c) $x_1=-3, x_2=4$ d) $x_1=-6, x_2=-5$

4.42.a) $x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{3}{2}$ b) $x_1=-\frac{5}{3}, x_2=-\frac{1}{3}$ c) $\left\{-\frac{13}{3}, 6\right\}$ d) $\left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$

4.43.a) $x_1=x_2=2$ b) $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$ c) $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ d) $\left\{\frac{3}{5}\right\}$

4.44.a) $\{5, 8\}$ b) $\{2-7i, 2+7i\}$ c) $\left\{-\frac{1}{2}-i, -\frac{1}{2}+i\right\}$ d) $\left\{-\frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right\}$

4.45.a) $x_1=1, x_2=3$ b) $x_1=-6, x_2=3$ c) $x_1=4-i, x_2=4+i$

4.46.a) $x_1=-3, x_2=2$ b) $x_1=-3, x_2=5$

4.47.a) $x_1=4, x_2=6$ b) $x_1=-m\sqrt{2}$, $x_2=m\sqrt{2}$

4.48.a) $x_1=2, x_2=5$ b) $x_1=-\frac{34}{71}, x_2=1$

4.49.a) $x_1=\frac{7}{9}, x_2=7$ b) $x_1=5, x_2=\frac{80}{21}$.

4.50.a) $t_1=0{,}75$, $t_2=1$ b) $y=2$ **4.51**.a) $x_1=-2, x_2=0$ b) $x_1=-4, x_2=5$

4.52.a) $z=8$ b) $z_1=0, x_2=-\frac{\sqrt{5}}{2}, x_3=\frac{\sqrt{5}}{2}$ **4.53**. $x_1=-\frac{5}{2}, x_2=0$.

4.54.a) $x=2$ b) $x_1=-\frac{15}{8}, x_2=1$

4.55.a) Uputa: Uzeti da je $x^2-16x=t$ i riješiti nastalu kvadratnu jednačinu po t. Zatim riješiti jednačine $x^2-16x=t$. $x_{1,2}=8\pm\sqrt{57}$, $x_{3,4}=8\pm\sqrt{73}$

b) $x_1=-4$, $x_2=-2$, $x_3=-1$, $x_4=1$.

4.56.a) Ako uvedemo smjenu $\frac{1}{x+1}=t$, data jednačina postaje $t^2-8t+15=0$.

Rješavanjem ove jednačine dobije se t, a zatim i x. Rezultat: $x_1=-\frac{4}{5}, x_2=-\frac{2}{3}$.

b) $x_1=-17$, $x_2=67$

4.57.a) $x_1=1, x_2=3$ b) $x_1=-2, x_2=1$ **4.58**.a) (0, 1, 3, 4) b) $x=1$.

4.59.a) $x_1=2a, x_2=3a$ b) $x_1=m-n, x_2=m+n$ **4.60**.a) $y_1=1$, $y_2=\frac{1}{a}$ b) $y_1=2m$, $y_2=2n$

4.61.a) Množenjem jednačine sa $(x-b)(a-x)$ i sređivanjem dobivamo kvadratnu jednačinu: $2x^2-3(a+b)x+(a+b)^2=0$ čija su rješenja $x_1=a+b$ i $x_2=\frac{a+b}{2}$.

b) $x_1=-0{,}5a$, $x_2=2a$

4.62.a) $x_1=-a, x_2=-b$ b) $x_{1,2}=\dfrac{-(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}$

4.63.a) $x_1=\dfrac{m}{3}, x_2=\dfrac{m}{5}$ b) $x_1=\dfrac{a+3b}{4}, x_2=\dfrac{a+5b}{6}$

4.64. $x_1=m-2$, $x_2=n$ **4.65**. $x_1=-a$, $x_2=b+3$ **4.66**. $x_1=a$, $x_2=b-3$

4.67.a) $x_1=\dfrac{1}{b-1}, x_2=\dfrac{a-1}{b-1}, b\neq 1.$ b) $x_1=\dfrac{a}{b},\ x_2=-\dfrac{c}{a}.$ 4.68. $x_1=0, x_{2,3}=\sqrt{a^2+b^2}.$

4.3. Diskriminanta i ispitivanje prirode rješenja kvadratne jednačine

4.69.a) $D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-5)=9+20=29$ b) $D=9$ c) $D=-8$ d) $D=49$

4.70.a) $D=0$ b) $D=0$ c) $D=-679$ d) $D=737$

4.71.a) $D=(-3a)^2+4a=9a^2+4a$ b) $D=4m^2-8m$

c) $D=25m^2-16m+32$ d) $D=a^2-24a+12$

4.72.a) $D=b^2-4ac=5>0$ => x_1 i x_2 su realni i međusobno različiti brojevi .

b) $D=25>0$ => x_1 i x_2 su realni i međusobno različiti brojevi .

c) $D=-84<0$ => x_1 i x_2 su konjugovano-kompleksni brojevi .

d) $D=-36<0$ => x_1 i x_2 su konjugovano-kompleksni brojevi .

4.73.a) $D=28>0$ => x_1 i x_2 su realni i međusobno različiti brojevi .

b) $D=41>0$ => x_1 i x_2 su realni i međusobno različiti brojevi .

c) $D=17>0$ => x_1 i x_2 su realni i međusobno različiti brojevi .

d) $D=28>0$ => x_1 i x_2 su realni i međusobno različiti brojevi .

4.74.a) $D=-8<0$ => x_1 i x_2 su konjugovano-kompleksni brojevi .

b) $D=0$ => $x_1=x_2$ (Rješenja su jednaki realni brojevi).

c) $D=64>0$ => x_1 i x_2 su realni i međusobno različiti brojevi.

d) $D=0$ => $x_1=x_2$ (Rješenja su jednaki realni brojevi).

4.75. Da bi jednačina imala jednaka rješenja, njena diskriminanta mora biti jednaka nuli. Iz tog uslova dobije se c: $D=9-4c=0 \Leftrightarrow c=\dfrac{9}{4}$.

4.76. Rješenja jednačine su realna ako je njena diskriminanta nenegativna:

$$D=1+12c\geq 0 \Leftrightarrow 12c\geq -1 \Leftrightarrow c\geq -\frac{1}{12}.$$

4.77. Rješenja kvadratne jednačine su realna i različita, ako je njena diskriminanta pozitivna:

$$D=64-8(c+10)>0 \Leftrightarrow 8-(c+10)>0 \Leftrightarrow 8-c-10>0 \Leftrightarrow c<-2 .$$

Rješenja jednačine $2x^2-8x+c+10=0$ su realna i različita za sve vrijednosti varijable c koje su manje od -2.

4.78. $m<\dfrac{1}{32}$ **4.79**. $m>\dfrac{1}{3}$ **4.80**. $b_{1,2}=\pm 4$ **4.81**. $n_{1,2}=\pm 2\sqrt{3}$ **4.82**. $k=\dfrac{13}{14}$.

4.83.a) Prema datom uvjetu mora biti $x_1+x_2=0$, tj. $5(m^2-4)=0$ => $m=\pm 2$.

b) Uvrštavanjem vrijednosti $x=0$ u datu jednačinu dobivamo $m=\dfrac{3}{2}$.

c) Za m=2, data jednačina postaje $x^2-1=0$ => $x_{1,2}=\pm 1$.

Za m=-2, dobivamo jednačinu $x^2-7=0$ => $x_{1,2}=\pm\sqrt{7}$.

Za $m=\dfrac{3}{2}$, data jednačina se transformiše u $x^2+15x=0$ => $x=0$, $x=-15$.

4.84.a) Rješenja jednačine $ax^2+bx+c=0$ su racionalni brojevi ako je njena diskriminanta $D=b^2-4ac$ potpuni kvadrat , tj. ako postoji racionalan broj k za koji je $D=k^2$.

b) Rješenja jednačine $ax^2+bx+c=0$ su iracionalni brojevi ako njena diskriminanta $D=b^2-4ac$ nije potpuni kvadrat , tj. ako ne postoji racionalan broj k za koji je $D=k^2$.

4.85.a) $D=25=5^2$, rješenja jednačine su racionalni brojevi.

b) $D=76$, rješenja jednačine su iracionalni brojevi.

c) $D=100=10^2$, rješenja jednačine su racionalni brojevi.

d) $D=16=4^2$, rješenja jednačine su racionalni brojevi.

4.86. $a=n(n+1)$, gdje je n prirodan broj .

4.87.* $D=4a^2-4(a^2-b^2-c^2)=4b^2+4c^2=4(b^2+c^2)\geq 0$ => rješenja jednačine su realni brojevi.

4.88.* $D=4(a+b+c)^2-12(a^2+b^2+c^2)=4(-2a^2-2b^2-2c^2-2ab-2ac-2bc)=$

$=-8(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)\leq 0$, jer je $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$. Kako jednakost vrijedi samo u slučaju kada su brojevi a, b i c međusobno jednaki, to je diskriminanta D negativna za sve vrijednosti koeficiejnata a, b i c koji su međusobno različiti, pa jednačina ima iracionalna rješenja.

4.89. Diskriminanta D date kvadratne jednačine je: $D=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$.

Kako su a, b i c dužine stranica trougla, to vrijedi nejednakost trougla, pa je

$$|b-c|<a<b+c \Leftrightarrow |b-c|^2<a^2<(b+c)^2 \Leftrightarrow b^2-2bc+c^2<a^2<b^2+2bc+c^2$$

=> $(b^2+c^2-a^2<2bc$ i $b^2+c^2-a^2>-2bc)$ => $-2bc<b^2+c^2-a^2<2bc$

=> $|b^2+c^2-a^2|<2bc$

=> $|b^2+c^2-a^2|^2<4b^2c^2$ => $(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2<0$ => $D<0$.

Kako je diskriminanta kvadratne jednačine negativna, to su njena rješenja konjugirano- kompleksni brojevi.

4.90. Nakon sređivanja, druga jednačina postaje

$$(3-k)x^2+2(k+1)x+k^2-k+2=0$$

Diskriminante jednačina su:

$D_1(k)=4-4k=4(1-k)$, $D_2(k)=4(k+1)^2-4(3-k)(k^2-k+2)=\ldots=4(k-1)[(k-1)^2+4]$.

Posmatrajmo proizvod diskriminanti:

$D_1(k)\cdot D_2(k)=4(1-k)\cdot 4(k-1)[(k-1)^2+4]=-16(k-1)^2[(k-1)^2+4]<0$ za $k\neq 1$. Dakle, proizvod diskriminanti je negativan (za $k\neq 1$), što znači da je jedna od njih pozitivna, a druga negativna. To, dalje, znači da su rješenja jedne od dviju datih kvadratnih jednačina realna, a druge konjugirano-kompleksna. Ako je k=1, tada su obje diskriminante jednake nuli, pa jednačine imaju dvostruko realno rješenje.

4.4. Normirani oblik kvadratne jednačine (jednadžbe). Vieteove formule

4.91.a) $x^2-3x+5=0$ b) $x^2-7x+6=0$ c) $x^2+2x+\frac{15}{4}=0$

4.92.a) $x^2+\frac{6}{61}x+\frac{11}{61}=0$ b) $x^2+\frac{12}{7}x+11=0$ c) $x^2-\frac{1}{100}x-\frac{1}{100}=0$

4.93.a) $x_1+x_2=10$ b) $x_1+x_2=-34$ c) $x_1+x_2=66$

4.94.a) $x_1+x_2=1$ b) $x_1+x_2=88$ c) $x_1+x_2=-2000$

4.95.a) $x_1 \cdot x_2=4$ b) $x_1 \cdot x_2=19$ c) $x_1 \cdot x_2=-1999$

4.96.a) $x_1 \cdot x_2=-11$ b) $x_1 \cdot x_2=92$ c) $x_1 \cdot x_2=1998$

4.97.a) $x_1+x_2=5$ b) $x_1+x_2=-3$ c) $x_1+x_2=-30$

4.98.a) $x_1 \cdot x_2=2$ b) $x_1 \cdot x_2=33$ c) $x_1 \cdot x_2=-5$

4.99.a) $x_1+x_2=-88,\ x_1 \cdot x_2=222$ b) $x_1+x_2=55,\ x_1 \cdot x_2=76$ c) $x_1+x_2=\frac{4}{3},\ x_1 \cdot x_2=\frac{87}{3}$

4.100.a) $x_1+x_2=44,\ x_1 \cdot x_2=-77$ b) $x_1+x_2=m-1,\ x_1 \cdot x_2=19$

c) $x_1+x_2=-\frac{2(m-1)}{m},\quad x_1 \cdot x_2=\frac{3m-1}{2m}$

4.101.a) $x^2-(x_1+x_2)x+(x_1 \cdot x_2)=0$, $x^2-6x+5=0$ b) $x^2-x-12=0$

c) $x^2+6x+8=0$ d) $x^2-x-42=0$

4.102.a) $x^2-(3a+1)x+3a=0$ b) $x^2-(m-3)x+4(m-1)=0$

c) $x^2+(m+3)x-m-3=0$ d) $x^2-2mx+m^2-1=0$

4.103.a) x^2-4x+5 b) $x^2+6x013=0$ c) $x^2-2x+26=0$ d) $x^2-8x+20=0$

4.104.a) $x^2-4x+2=0$ b) $16x^2+24x-39=0$ **4.105**.a) $3x^2-10x-5=0$ b) $x^2-6x-41=0$

4.106. $x_1+x_2=1 \Rightarrow x_2=1-x_1=1-4=-3$.

Drugi način: $x_1 \cdot x_2=-12 \Rightarrow x_2=-\frac{12}{x_1}=-\frac{12}{4}=-3$. **4.107**. $x_2=-1$

4.108. $x_1+x_2=7$, $x_1 \cdot x_2=k$, $x_1=-2 \Rightarrow x_2=7-x_1$, $k=x_1 \cdot x_2 \Rightarrow x_2=9,\ k=-18$.

4.109. Koristeći Vieteove formule i dati uvjet dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=\frac{11}{2} \\ 2x_1-x_2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x_1=\frac{11}{2}+2 \Rightarrow 3x_1=\frac{15}{2} \Rightarrow x_1=\frac{5}{2}.$$

$x_2=2x_1-2=5-2=3$. $\quad x_1 \cdot x_2=\frac{m}{2} \Rightarrow m=2x_1 \cdot x_2 \Rightarrow m=15$.

4.110. $x_1+x_2=\frac{15}{4},\ x_1x_2=a^3,\ x_1=x_2^2 \Rightarrow x_2^2+x_2=\frac{15}{4},\ a=x_2$

$$\Rightarrow 4a^2+4a-15=0 \Rightarrow a=-\frac{5}{2},\ a=\frac{3}{2}.$$

4.111. $x^2-(2x_1+2x_2)x+(2x_1 \cdot 2x_2)=0 \Rightarrow x^2-2(x_1+x_2)x+4(x_1 \cdot x_2)=0$

$\Rightarrow x^2-2 \cdot (-9)x+4 \cdot 14=0 \Rightarrow x^2+18x+56=0$.

4.112. Neka su rješenja jednačine y_1 i y_2. Prema datim uvjeima i Vieteovim formulama vrijedi: $y_1+y_2=(x_1+3)+(x_2+3)=x_1+x_2+6=-6+6=0$.

$y_1 \cdot y_2=(x_1+3) \cdot (x_2+3)=x_1 \cdot x_2+3x_1+3x_2+9=x_1 \cdot x_2+3(x_1+x_2)+9=8+3 \cdot (-6)+9=-1$.

$y^2-(y_1+y_2)y+(y_1 \cdot y_2)=0$, $y^2-0 \cdot y+(-1)=0$, $y^2-1=0$.

4.113. Neka su rješenja jednačine y_1 i y_2. Prema datim uvjetima i Vieteovim formulama vrijedi: $y_1+y_2=(x_1-2)+(x_2-2)=x_1+x_2-4=-4-4=-8$.

$y_1 \cdot y_2=(x_1-2) \cdot (x_2-2)=x_1 \cdot x_2-2x_1-2x_2+4=x_1 \cdot x_2-2(x_1+x_2)+4=4-2 \cdot (-4)+4=16$.

$y^2-(y_1+y_2)y+(y_1 \cdot y_2)=0$, $y^2+8y+16=0$.

4.114.a) $x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=25-2 \cdot 11=3$.

b) $x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)=\pm(x_1+x_2)\sqrt{(x_1-x_2)^2}=$

$$=\pm(x_1+x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\pm 5\sqrt{25-44}=\pm 5i\sqrt{19}.$$

c) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-3x_1x_2)=$

$=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]=5[5^2-3 \cdot 11]=5(25-33)=-40$.

4.115.a) $x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2q$.

b) $x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)=$

$$\pm(x_1+x_2)\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\pm(x_1+x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\pm p\sqrt{p^2-4q}.$$

c) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-3x_1x_2)=$

$=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]=-p[p^2-3 \cdot q]$.

4.116.a) $x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2}{a^2}-2 \cdot \frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$.

b) $x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)=$

$$=\pm(x_1+x_2)\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\pm(x_1+x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=$$

$$=\pm\frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}=\pm\frac{b\sqrt{b^2-4ac}}{a^2}.$$

c)* $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-3x_1x_2)=$

$=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]=$

$$=-\frac{b}{a}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2-3 \cdot \frac{c}{a}\right]=-\frac{b}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right)=\frac{-b(b^2-3ac)}{a^3}.$$

4.117.a) $x_1+x_2=3$ b) $x_1x_2=-10$ c) $x_1^2+x_2^2=29$ d) $x_1^2-x_2^2=\pm 21$

4.118.a) $(x_1-x_2)^2=49$ b) $x_1^3+x_2^3=117$ c) $x_1^3-x_2^3=\pm 133$ d) $(x_1-x_2)^3=\pm 343$

4.119. Neka su y_1 i y_2 rješenja tražene jednačine. Tada vrijedi:

$y_1+y_2=(\alpha+2\beta)+(2\alpha+\beta)=3\alpha+3\beta=3(\alpha+\beta)=3 \cdot 5=15$.

$y_1y_2=(\alpha+2\beta)(2\alpha+\beta)=2\alpha^2+\alpha\beta+4\alpha\beta+2\beta^2=2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta=2 \cdot 5^2+3=53$.

Tražena jednačina je $y^2-15y+53=0$.

4.120. Neka su y_1 i y_2 rješenja nove kvadratne jednačine. Tada vrijedi:

$$y_1+y_2=\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta+\frac{1}{\beta}=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{a}+\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{a}-\frac{b}{c}=-\frac{b(a+c)}{ac}.$$

$$y_1y_2=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\alpha\beta+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}=$$

$$=\alpha\beta+\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{c}{a}+\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{\frac{c}{a}}+\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{c}{a}+\frac{b^2-2ac}{ac}+\frac{c}{a}=\frac{a^2+b^2+c^2-2ac}{ac}.$$

Tražena jednačina ima oblik: $acx^2+(a+c)bx+b^2+(a-c)^2=0$.

4.121. $$\left.\begin{aligned} x_1+x_2&=-\frac{a}{3}\\ x_1x_2&=-\frac{2}{3}\\ x_1^2+x_2^2&=\frac{13}{9}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1+x_2&=-\frac{a}{3}\\ x_1x_2&=-\frac{2}{3}\\ (x_1+x_2)^2-2x_1x_2&=\frac{13}{9}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{a^2}{9}+\frac{4}{3}=\frac{13}{9}\Leftrightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm1.$$

4.122. $$\left.\begin{aligned} x_1+x_2&=\frac{2(m-1)}{m-2}\\ x_1x_2&=\frac{m}{m-2}\\ \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}&=\frac{5}{4}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1+x_2&=\frac{2(m-1)}{m-2}\\ x_1x_2&=\frac{m}{m-2}\\ \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1^2x_2^2}&=\frac{5}{4}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{\left[\frac{2(m-1)}{m-2}\right]^2-\frac{2m}{m-2}}{\left(\frac{m}{m-2}\right)^2}=\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\frac{4m^2-8m+4}{(m-2)^2}-\frac{2m(m-2)}{(m-2)^2}}{\frac{m^2}{(m-2)^2}}=\frac{5}{4}\quad\Leftrightarrow\quad \frac{4m^2-8m+4-2m^2+4m}{m^2}=\frac{5}{4}$$

$\Leftrightarrow$ $3m^2-16m+16=0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $m=4,\ m=\frac{4}{3}$.

7.123. $\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3=\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\right]+\alpha\beta(\alpha+\beta)=$

$$=-\frac{b}{a}\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2-3\cdot\frac{c}{a}\right]+\frac{c}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{b}{a}\cdot\frac{b^2-3ac}{a^2}-\frac{bc}{a^2}=-\frac{b}{a^3}\left(b^2-2ac\right)$$

Ako su a, b i c ($a\neq0$) racionalni brojevi, to je i dobiveni izraz uvijek racionalan.

4.124. $\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4=(\alpha+\beta)^4-3\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)-5(\alpha\beta)^2=p^4-3q(p^2-2q)-5q^2=$

$$=p^4-3p^2q+6q^2-5q^2=p^4-3p^2q+q^2.$$

Dobili smo racionalan izraz čija je vrijednost racionalan broj za svaku

racionalnu vrijednost od p i q.

4.125. Neka su y_1 i y_2 rješenja tražene jednačine. Koristeći dati uvjet i Vieteove formule dobijamo:

$y_1+y_2=x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2)^4-4x_1^3x_2-6x_1^2x_2^2-4x_1x_2^3=(x_1+x_2)^4-4x_1x_2(x_1^2+x_2^2)-6(x_1x_2)^2=$

$=(x_1+x_2)^4-4x_1x_2[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-6(x_1x_2)^2=625-12[25-6]-6\cdot3=625-228-54=343.$

$y_1y_2=x_1^4x_2^4=(x_1x_2)^4=3^4=81.$

Tražena jednačina je $x^2-343x+81=0$.

4.126.a) $x^2+(p-2)x+1-p+q=0$ b) $x^2+(2q-p^2)x+q^2=0$ c) $qx^2+2(p+q)x+(4+2p+q)=0$

4.127.a) $qx^2+p(q+1)x+(q+1)^2=0$ b) $qx^2+(p^2+2q)x+q=0$

c) $$y_1+y_2=\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}+\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-x_2)^2+(x_1+x_2)^2}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=\frac{2\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]}{\pm(x_1+x_2)\sqrt{(x_1-x_2)^2}}=$$

$$=\frac{2\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]}{\pm(x_1+x_2)\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}=\frac{2(p^2-2q)}{\pm p\sqrt{p^2-4q}}.$$

$$y_1y_2=\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}=1.$$

Jednačina koju tražimo ima oblik:

$$y^2-\frac{2(p^2-2q)}{\pm p\sqrt{p^2-4q}}y+1=0,\ \text{odnosno,}\ p\sqrt{p^2-4q}\,y^2\mp2(p^2-2q)y+p\sqrt{p^2-4q}=0$$

4.128. $$x_2^2\left(\frac{x_1^2}{x_2}-x_2\right)+x_1^2\left(\frac{x_2^2}{x_1}-x_1\right)=x_2^2\cdot\frac{x_1^2-x_2^2}{x_2}+x_1^2\cdot\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1}=x_2\left(x_1^2-x_2^2\right)-x_1\left(x_1^2-x_2^2\right)=$$

$$=\left(x_1^2-x_2^2\right)\cdot(x_2-x_1)=-(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2=-(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=p(p^2-4q).$$

4.129. Prema Vieteovim formulama i datim uvjetima vrijedi:

$(x_1+1)+(x_2+1)=p^2$ $\quad x_1+x_2+2=p^2$ $\quad p^2+p-2=0$ $\quad p=1,\ p=-2$

$(x_1+1)(x_2+1)=pq \Rightarrow x_1x_2+x_1+x_2+1=pq \Rightarrow q-p-pq+1=0 \Rightarrow q\in R$ ili $q=-1$.

4.130. Neka jednačine imaju zajedničko rješenje x_1. Tada vrijedi:

$$x_1+x_2=-m,\ x_1x_2=-2m,\ x_1+x_3=2m,\ x_1x_3=m\ \Rightarrow$$

$$x_2=\frac{-2m}{x_1},\ \frac{x_3}{x_2}=-\frac{1}{2},\ x_3=\frac{m}{x_1}\quad\ldots\Rightarrow\ m=1,\ x_1=1$$

4.131. Neka su x_1 i x_2 korijeni (rješenja) date jednačine, a y_1 i y_2 rješenja nove jednačine koju tražimo. Tada vrijedi:

$$y_1=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]=-p(p^2-3q)=-p^3+3pq.$$

$$y_2=(x_1+x_2)^3=-p^3.$$

Kako je $y_1+y_2=-2p^3+3pq$, $y_1\cdot y_2=p^4(p^2-3q)$, to tražena kvadratna jednačina ima oblik $y^2-(y_1+y_2)y+(y_1\cdot y_2)=0$, odnosno,

$$y^2-(-2p^3+3pq)y+p^4(p^2-3q)=0.$$

4.132. Uputa: ($x_1^3+x_2^3=1$, $x_1x_2=m-1$, $x_1^3+x_2^3=7$) $\Rightarrow$ $m=-1$.

4.5. Znaci rješenja kvadratne jednačine (jednadžbe)

4.133. Određivanjem diskriminante kvadratne jednačine utvrđujemo da li su rješenja jednačine realna ili nisu. U slučaju kada su rješenja realna (kada je diskriminanta nenegativna) istražujemo zbir i proizvod rješenja. Ako je zbir rješenja pozitivan broj, tada je bar jedno rješenje pozitivan broj, ako je zbir rješenja negativan broj, bar jedno rješenje je negativno. Ako je proizvod rješenja pozitivan broj, oba rješenja su istog znaka, ako je proizvod rješenja negativan broj, tada rješenja imaju različite znakove.

a) $D=b^2-4ac=16-4=12>0$ $\Rightarrow$ Rješenja su realni brojevi.
$x_1+x_2=4>0$ $\Rightarrow$ Bar jedno rješenje je pozitivno.
$x_1x_2=1>0$ $\Rightarrow$ Oba rješenja imaju isti znak.

Iz posljednja dva zaključka, dalje, utvrđujemo da su oba rješenja pozitivni brojevi.

b) $D=45>0$, $x_1+x_2=-1<0$, $x_1x_2=-11<0$ $\Rightarrow$ Rješenja jednačine su realni brojevi različitih znakova. Negativno rješenje ima veću apsolutnu vrijednost.

c) $D=56>0$, $x_1+x_2=1{,}5>0$, $x_1x_2=-3{,}5<0$ $\Rightarrow$ Rješenja su realni brojevi različitih predznaka. Pozitivno rješenje ima veću apsolutnu vrijednost.

d) $D=13>0$, $x_1+x_2=\frac{1}{3}>0$, $x_1x_2=-\frac{1}{3}<0$ $\Rightarrow$ Rješenja su realni brojevi različitih znakova. Pozitivno rješenje ima veću apsolutnu vrijednost.

4.134.a) $D=5>0$, $x_1+x_2=-1<0$, $x_1x_2=-1<0$ $\Rightarrow$ Rješenja su realni brojevi različitih predznaka od kojih negativno rješenje ima veću apsolutnu vrijednost.

b) $D=64>0$, $x_1+x_2=-\frac{1}{3}<0$, $x_1x_2=-\frac{1}{12}<0$ $\Rightarrow$ Rješenja jednačine su realni brojevi različitih znakova. Negativno rješenje ima veću apsolutnu vrijednost.

c) $D=0$, $x_1+x_2=\frac{4}{3}>0$, $x_1x_2=\frac{4}{9}>0$ $\Rightarrow$ Rješenja su jednaki, realni, pozitivni brojevi.

d) $D=1>0$, $x_1+x_2=-\frac{7}{4}<0$, $x_1x_2=\frac{3}{4}<0$ $\Rightarrow$ Rješenja su realni brojevi različitih znakova. Negativno rješenje ima veću apsolutnu vrijednost.

14.135. Treba odabrati takvu jednačinu čija je diskriminanta nenegativna, koja ima pozitivan zbir i pozitivan proizvod rješenja. To može biti slijedeća jednačina: $2x^2-5x+1=0$.

4.136. Moraju biti ispunjeni uvjeti: diskriminanta pozitivna, zbir rješenja negativan, proizvod rješenja pozitivan. To može biti slijedeća jednačina: $x^2+7x+2=0$.

4.137. Uvjete ispunjava kvadratna jednačina čija je diskriminanta pozitivna, koja ima negativan zbir rješenja i negativan proizvod rješenja. Neka to bude slijedeća jednačina: $2x^2+11x-2=0$.

4.6. Primjena kvadratnih jednačina (jednadžbi)

4.138. Neka je traženi broj x. Tada se dati uvjeti mogu izraziti na slijedeći način:

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}=54 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{6}=54 \quad\Leftrightarrow\quad x^2=324 \quad\Leftrightarrow\quad x=18 \vee x=-18.$$

Postoje dva broja koji ispunjavaju postavljene uvjete. To su brojevi 18 i -18.

4.139. Traženi broj je 60.

4.140. Neka je traženi broj x. Tada, koristeći date uvjete, možemo formirati jednadžbu: $(x+2)^2+(x-5)^2=65$ $\Leftrightarrow$
$x^2+4x+4+x^2-10x+25=65$ $\Leftrightarrow$ $x^2-3x-18=0$ $\Leftrightarrow$ $x=-3$ ili $x=6$.

4.141. Ako je x jedna cifra traženog broja, tada vrijedi: $x(8-x)=15$, odakle dobijamo $x=3$, odnosno $x=5$. Traženi broj je 35 ili 53.

4.142. 23 **4.143.** 35

4.144. Ako je x cifra desetica traženog broja, tada je cifra jedinica x-4, pa se može pisati:
$\overline{x(x-4)}\cdot[x+(x-4)]=306$ $\Leftrightarrow$ $(11x-4)(x-2)=153$ $\Leftrightarrow$ $11x^2-26x-145=0$ $\Rightarrow$ $x=5$

Traženi broj je 51.

4.145. Dva uzastopna prirodna broja mogu se napisati kao x i x+1, gdje je x ma koji prirodan broj. Prema datim uvjetima možemo formirati slijedeću jednadžbu:
$(2x+1)^2=x^2+(x+1)^2-312$ $\Leftrightarrow$ $x^2+x-156=0$ $\Rightarrow$ $x=12$.

Traženi brojevi su 12 i 13. **4.146.** 15 i 16

4.147. $(2x)^2+(2x+2)^2=340$ $\Leftrightarrow$ $x^2+x-42=0$ $\Rightarrow$ $x=6$. Traženi brojevi su 12 i 14.

4.148. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=290$ $\Leftrightarrow$ $8x^2-288=0$ $\Rightarrow$ $x=6$. Traženi brojevi su 11 i 13.

4.149. Traženi brojevi su 7 i 8.

4.150. $(2x-2)^2+(2x)^2+(2x+2)^2=200$ $\Leftrightarrow$ $x=\pm4$. Traženi brojevi su 6, 8, 10 ili -10, -8, -6 **4.151.** $(x+1)^3-x^3=1387$ $\Leftrightarrow$ $x=21$. Traženi brojevi su 21 i 22.

4.152. Primijeni Pitagorinu teoremu. Svaku stranicu treba produžiti za $x=5$.

4.153. Svaku stranicu treba produžiti za $x=10$ jedinica.

4.154. $a=5$, $b=12$ **4.155.** $a=10$, $b=5$ **4.156.** $a=12$, $b=5$

4.157. $d_n=6n \Leftrightarrow \frac{n(n-3)}{2}=6n \Leftrightarrow n^2-15n=0 \Rightarrow n=15.$

Traženi poligon je petnaestougao. **4.158.** $n=5$

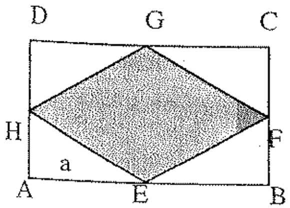
4.159. Neka je x ivica kocke. Tada, prema uslovu zadatka, vrijedi: $x^3=(x-3)^3+117$. Ova jednačina transformira se u kvadratnu $x^2-3x-10=0$ čije rješenje $x=5$ daje traženu ivicu kocke. Smanjenje površine dobijamo na slijedeći način:

$$\Delta P=6x^2-6(x-3)^2=6(5^2-2^2)=6(25-4)=126.$$

4.160. Neka su x i y stranice pravougaonika ABCD i $P=36\ cm^2$ površina romba EFGH. Nije teško zaključiti da je površina pravougaonika dva puta veća od površine romba, pa vrijedi xy=2P, odnosno , xy=72. Kako je dijagonala pravougaonika d=2a (teorema o srednjoj duži trougla), to je

$$x^2+y^2=4a^2,\ \text{odnosno,}$$

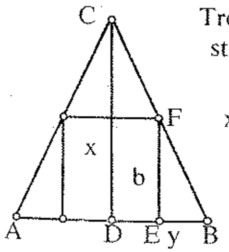
$$x^2+2xy+y^2=4a^2+2xy \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)^2=256+144 \quad \Leftrightarrow \quad x+y=20.$$



Stranice pravougaonika su rješenja jednačine $x^2-20x+72=0$, odnosno, $x=10+2\sqrt{7}$ i $y=10-2\sqrt{7}$.

Sl.4.160.

4.161.*



Sl.4.161.

Trougao BCD je sličan ΔBEF, pa za njihove stranice vrijedi :

$$\overline{CD}:\overline{DB}=\overline{FE}:\overline{EB}, \quad \text{odnosno,}$$

x=ab: (a-b), (x-visina, b-stranica kvadrata). Iz datog uslova za površinu dobivamo kvadratnu jednačinu $x^2-2a(n-1)x+a^2=0$, čije rješenje daje traženu visinu. Zadatak ima rješenje ako je $n\geq 2$.

4.162. $s=r+2$, $P=r^2\pi+rs\pi \Rightarrow 24\pi=r^2\pi+r(r+2)\pi \Rightarrow r^2+r-12=0 \Rightarrow r=3,\ s=5$. $H^2=s^2-r^2 \Rightarrow H^2=25-9 \Rightarrow H=4$. **4.163**. 10 sati , 15 sati

4.164. Ako prva cijev napuni bazen za x sati, onda druga cijev puni isti bazen za x+8 sati. Zato se može formirati slijedeća jednačina: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+8}=\frac{1}{3}$, koja se transformiše u kvadratnu $x^2+2x-24=0$, odakle dobivamo x=4.

Dakle, prva cijev napuni bazen za 4, a druga za 12 sati.

4.165. Neka je x brzina drugog automobila. Tada je brzina prvog x+16. Kako za put s, vrijeme t i brzinu v vrijedi s=vt, to se dati uvjet može napisati na slijedeći način:

$$\frac{\frac{s}{2}}{x+16}+3=\frac{s}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-112x-5120=0 \quad \Rightarrow \quad x=64.$$

Prvi automobil se kretao brzinom od 80 km/h, a drugi 64 km/h .

4.166. $\frac{480}{x}-\frac{480}{x+20}=2 \Leftrightarrow x^2+20x-4800=0 \Rightarrow x=60.$

4.167. $\frac{1000}{x}=\frac{1000}{x-5}-10 \Leftrightarrow x^2-5x-500=0 \Rightarrow x=25m/s.$

4.168. Ako sa x označimo brzinu kretanja vode, tada na osnovu datih uvjeta možemo formirati slijedeću jednačinu:

$$\frac{495}{50+x}=\frac{495}{50-x}-2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+495x-2500=0.$$

Rješavanjem nastale kvadratne jednačine dobijamo x=5. Brzina rijeke je 5 km/h.

4.169. Označimo sa x nepoznati otpor. Tada vrijedi:

$$\frac{220}{x}+2=\frac{220}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x-110=0 \quad \Rightarrow \quad x=11.$$

Drugo rješenje jednačine ne odgovara prirodi zadatka, pa je početni otpor bio 11 Ω.

4.170. Ako sa x označimo početni otpor tada vrijedi:

$$\frac{220}{x}-22=\frac{220}{x+5} \quad \Rightarrow \quad x=5\Omega.$$

4.171. Prema datim uvjetima je:

$$a-\frac{ap}{100}-\left(a-\frac{ap}{100}\right)\cdot\frac{p}{100}=b \quad \Leftrightarrow \quad ap^2-200ap+10000(a-b)=0$$

$$\Rightarrow \quad p_{1,2}=\frac{200a\pm 200\sqrt{ab}}{2a}=100\left(1\pm\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

Specijalno,

$$p_{1,2}=100\left(1\pm\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=100\left(1\pm\sqrt{\frac{1200}{2000}}\right)=100\left(1\pm\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=100(1\pm 0{,}774596).$$

Rezultat: p=22,5404%

4.7. Kvadratni trinom. Rastavljanje na linearne faktore (činioce)

4.172. Ako su x_1 i x_2 nule kvadratnog trinoma ax^2+bx+c, tada ovaj trinom rastavljamo na faktore na slijedeći način: $\mathbf{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$.

a) $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ b) $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$
c) $x^2-7x+6=(x-1)(x-6)$ d) $x^2-10x+9=(x-1)(x-9)$

4.173.a) $x^2+10x+9=(x+1)(x+9)$ b) $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$
c) $-x^2+2x+35=-(x+5)(x-7)$ d) $-x^2+x+42=-(x-7)(x+6)=(7-x)(x+6)$

4.174.a) $8x^2+10x+3=8\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(4x+3)(2x+1)$

b) $x^2-25x+114=(x-6)(x-19)$.

c) $2x^2+x-3=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)=(2x+3)(x-1)$.

d) $3x^2+x-2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+1)=(x-2)(x+1)$.

4.175.a) $2x^2-ax-a^2=(2x+a)(x-a)$ b) $x^2-2ax+a^2=(x-a)(x-a)$
c) $2a^2x^2+abx-b^2=(ax+b)(2ax-b)$ d) $2a^2-5abx+3b^2x^2=(bx-a)(3bx-2a)$.

4.176.a) $4x^2-2bx+ab-a^2=(2x-a)(2x-b+2)$

b) $2a^3b^3+ab(2a-b)x-x^2=-(x-a^2b)(x+ab^2)$

c) $2abx^2+(2a^2+2ab-3b^2)x+2a^2-3ab=(2ax+2a-3b)(bx+a)$.

4.177.a) $x^2-ax-6a^2=(x-3a)(x+2a)$ b) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=(bx-a)(ax-b)$

c) $a^2-ab-2b^2=(a-2b)(a+b)$

4.178.a) $\frac{x^2-6a+9}{a^2-9}=\frac{(a-3)(a-3)}{(a-3)(a+3)}=\frac{a-3}{a+3}$ b) $\frac{a^2-4}{a^2+4a+4}=\frac{a-2}{a+2}$

4.179.a) $\frac{5a^2-5}{a^2+2a+1}=\frac{5(a-1)(a+1)}{(a+1)(a+1)}=\frac{5(a-1)}{a+1}$ b) $\frac{a^2-6a+9}{a^2-9}=\frac{a-3}{a+3}$

4.180.a) $\frac{a^2-4}{a^2+4a+4}=\frac{(a-2)(a+2)}{(a+2)(a+2)}=\frac{a-2}{a+2}$ b) $\frac{10(x+10)}{x-10}$ c) $\frac{x-2}{20(x+2)}$

4.181.a) $\frac{a^2-3a+2}{a^2+2a-8}=\frac{(a-1)(a-2)}{(a+4)(a-2)}=\frac{a-1}{a+4}$ b) $\frac{a^2-3a-10}{2a^2+3a-2}=\frac{(a+2)(a-5)}{(2a-1)(a+2)}=\frac{a-5}{2a-1}$

4.182.a) $\frac{2a^2-8a-90}{3a^2+36a+105}=\frac{2(a-9)(a+5)}{3(a+5)(a-7)}=\frac{2(a+5)}{3(a-7)}$

b) $\frac{x^2+bx-2b^2}{x^2+9bx+14b^2}=\frac{x-b}{x+7b}$

4.183.a) $\frac{3x-8a}{2x+a}$ b) $\frac{2x-a}{2a-x}$

4.184.a) $\frac{2x^2-2x-12}{3x^2+x-10}=\frac{2(x-3)}{3x-5}$ b) $\frac{5x^2-2x-3}{5x^2+3x}=\frac{x-1}{x}$

4.185.a) $\frac{x^{n+2}+2x^{n+1}+x^n}{x^{n+2}-x^n}=\frac{x^n(x^2+2x+1)}{x^n(x^2-1)}=\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{x-1}$.

b) $\frac{7x^{n+2}+6x^{n+1}-13x^n}{x^{n+3}-x^n}=\frac{x^n(x-1)(7x+13)}{x^n(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{7x+13}{x^2+x+1}$.

4.186.a) $\frac{x-1}{3x+1}$ b) $\frac{x-a}{x-b}$

4.8. Kvadratna jednačina – razni zadaci

4.187. Navedeni izrazi nisu definisani za one vrijednosti varijable x za koje trinom u nazivniku ima vrijednost nula.

a) $x=-5$, $x=3$ b) $x=4$, $x=-3/2$ c) $x=-3$, $x=-5/3$

4.188.a) 0 b) $2x-3$ **4.189.** $\frac{9}{1-x^2}$.

4.190.a) $x=1$ b) Nema rješenja **4.191.** Jednačina nema rješenja!

4.192.a) $x_1=-\frac{5}{8}$, $x_2=2$ b) $x_1=-\frac{b}{6}$, $x_2=\frac{b}{2}$, $b\neq 0$.

4.193.a) $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ b) Ako svaki brojnik i svaki nazivnik na lijevoj strani jednačine podijelimo sa x i uvedemo smjenu $x-\frac{5}{x}=t$, dobivamo kvadratnu jednačinu po t, a zatim i rješenja

$$x_1=-1, x_2=5, x_{3,4}=\frac{9\pm\sqrt{101}}{2}.$$

4.194.*a) Uvođenjem smjene $x^2-x=t$, data jednačina nastaje kvadratna po nepoznatoj t. Rješavanjem ove jednačine dobivamo t. Zamjenom dobivene vrijednosti za t u relaciju kojom je uvedena smjena nastaje kvadratna jednačina (za svaku vrijednost od t jedna) po x. Rezultati: $x_1=-1, x_2=2, x_{3,4}=\frac{9\pm\sqrt{101}}{2}$.

b) Desna strana jednačine, nakon kvadriranja binoma i sređivanja može se napisati u obliku $2(x^2-x+1)-1$, pa se uvođenjem smjene $x^2-x+1=t$ data jednačina svodi na kvadratnu. $x_1=-1, x_2=2, x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

4.195.a) Uputa: $(x^2-2x)^2-2(x-1)^2+2=0 \Leftrightarrow (x^2-2x)^2-2(x^2-2x+1)+2=0$.
Uvođenjem smjene: $x^2-2x=t$, data jednačina postaje kvadratna po t: $t^2-2t=0$. Rezultat: $x_1=0$, $x_2=2$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{3}$.

b) Uputa: $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47 \Leftrightarrow 4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+12\left(x+\frac{1}{x}\right)-47=0$

$\Leftrightarrow 4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12\left(x+\frac{1}{x}\right)-55=0$. Uvođenjem smjene $x+\frac{1}{x}=t$, dobivamo kvadratnu jednačinu $4t^2+12t-55=0$. Rezultat: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$, $x_{3,4}=\frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$.

4.196. Uputa: Ako je diskriminanta D=0, tada je kvadratni trinom potpuni kvadrat. Rezultat: k=4.

4.197.a) m=-2 b) m=2 c) $m=\frac{8}{5}$ d) m=2 e) $m=-\frac{8}{11}$ f) m=4

4.198. $\frac{x_1^2}{1+x_2}+\frac{x_2^2}{1+x_1}=\frac{x_1^2(1+x_1)+x_2^2(1+x_2)}{(1+x_2)(1+x_1)}=\frac{x_1^2+x_2^2+x_1^3+x_2^3}{1+x_1+x_2+x_1x_2}=$

$$=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]}{1+x_1+x_2+x_1x_2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{10}{3}+\frac{2}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{15}{3}\right]}{1+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}}=\frac{\frac{4}{9}-\frac{10}{3}+\frac{2}{3}\left[\frac{4-45}{9}\right]}{\frac{3+2+5}{3}}=\frac{\frac{4-30}{9}+\frac{-82}{27}}{\frac{10}{3}}=\frac{-\frac{160}{27}}{\frac{10}{3}}=-\frac{16}{9}.$$

4.199.a) Pod uvjetom da je $x\geq 0$, data jednačina je ekvivalentna sa kvadratnom jednačinom $x^2+6x+8=0$. Rješenja ove jednačine su $x=-2$ i $x=-4$. Ni jedno rješenje ne ispunjava postavljeni uvjet.
Neka je, sada, $x<0$. Tada je data jednačina ekvivalentna sa jednačinom $x^2-6x+8=0$ čija su rješenja $x=2$ i $x=4$. Ni jedan od ovih brojeva ne ispunjava postavljeni uvjet $(x<0)$. Dakle, data jednačina uopće nema rješenja.

b) Neka je, prvo, $x\geq 3$. Tada vrijedi:

$$(x-3)^2=|x-3| \Leftrightarrow x^2-6x+9=x-3 \Leftrightarrow x^2-7x+12=0.$$

Rješenja posljednje jednačine su $x=3$ i $x=4$. Oba broja zadovoljavaju postavljeni uvjet $(x\geq 3)$ pa su rješenja posmatrane jednačine.
Uzmimo, sada, da je $x<3$. Pod ovim uvjetom vrijede slijedeće ekvivalencije:

$$(x-3)^2=|x-3| \Leftrightarrow x^2-6x+9=-(x-3) \Leftrightarrow x^2-5x+6=0.$$

Rješenja posljednje jednačine su $x=2$ i $x=3$. Samo prvi broj zadovoljava postavljeni uvjet $(x<3)$, pa je $x=2$ rješenje posmatrane jednačine.
Dakle, jednačina $(x-3)^2=|x-3|$ ima tri rješenja. Skup njenih rješenja je $\{2, 3, 4\}$.

c) Skup rješenja jednačine je $\{-2, 1\}$.

4.200.a) Ako je $-x^2+1\geq 0$, odnosno, $x^2\leq 1$, odnosno $-1\leq x\leq 1$, tada vrijedi:

$$|-x^2+1|=-x^2+1 \Leftrightarrow -x^2+1=-x^2+1 \Leftrightarrow 0\cdot x^2=0 \Leftrightarrow 0\cdot x=0.$$

Posljednju jednačinu zadovoljava svaki realan broj, pa je rješenje date jednačine skup svih brojeva koji ispunjavaju postavljeni uvjet: $-1\leq x\leq 1$.
Ako je $-x^2+1<0$, odnosno, $x^2>1$, odnosno $x<-1$ ili $x>1$, tada vrijedi:

$$|-x^2+1|=-x^2+1 \Leftrightarrow x^2-1=-x^2+1 \Leftrightarrow 2\cdot x^2=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Kako ni jedan od ovih brojeva ne ispunjava postavljeni uvjet, to jednačina nema više rješenja. Rezultat: $-1\leq x\leq 1$ b) $1\leq x\leq 2$ c) 1

4.201.*a) Posmatrajmo intervale na koje su nule izraza x^2-1 i x podijelile skup realnih brojeva: $(-\infty, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$, $[1, +\infty)$.
Za $x\in(-\infty, -1)$ vrijedi:

$$|x^2-1|=-|x|+1 \Leftrightarrow x^2-1=x+1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=2.$$

Ni jedan od dobijenih brojeva ne pripada intervalu $(-\infty, -1)$, pa u ovom intervalu naša jednačina nema rješenja.
Za $x\in[-1, 0)$ vrijedi: $|x^2-1|=-|x|+1 \Leftrightarrow -x^2+1=x+1 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=-1$.
Broj $x=-1$ je rješenje date jednačine.
Za $x\in[0, 1)$ vrijedi: $|x^2-1|=-|x|+1 \Leftrightarrow -x^2+1=-x+1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=1$.
Broj $x=0$ je rješenje date jednačine.
Za $x\in[1, +\infty)$ vrijedi: $|x^2-1|=-|x|+1 \Leftrightarrow x^2-1=-x+1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=1$.
Broj $x=1$ je rješenje date jednačine.
Rezultat: Skup rješenja date jednačine je: $\{-1, 0, 1\}$.
b) Rezultat: Skup rješenja date jednačine je: $2\leq x\leq 3$. c) Rezultat: $x\leq 2$, $x\geq 3$.

4.202.a) $-4,\ 5,\ \frac{1-\sqrt{17}}{2},\ \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ b) $-3,\ -2,\ 0,\ 1$ c) $2,\ \frac{5}{2},\ \frac{9+\sqrt{17}}{4}$.

4.203.a) Uputa: Jednačina se može napisati u obliku:

$$(x+4)(x+8)(x+5)(x+7)=4 \Leftrightarrow (x^2+12x+32)(x^2+12x+35)=0.$$

Uvođenjem smjene $x^2+12x+32=t$, dobija se kvadratna jednačina $t(t+3)=4$, čijim rješavanjem dobivamo $t_1=1$, $t_2=-4$.
Rješavanjem kvadratnih jednačina $x^2+12x+32=1$ i $x^2+12x+32=-4$ dobivamo rješenje polazne jednačine. Rezultat: $-6,\ -6\pm\sqrt{5}$. b) $-6,\ 1,\ \frac{-5\pm i\sqrt{39}}{2}$

4.204. Uputa: Rješavanjem jednačine dobivamo $x_1=m-1$, $x_2=m+1$. Koristeći date uvjete da oba rješenja jednačine pripadaju intervalu $[-2, 4]$ imamo:
$-2\leq m-1\leq 4 \wedge -2\leq m+1\leq 4$. Rezultat: $-1\leq m\leq 3$.

4.205. Rješavanjem sistema jednačina

$$x^2-(a+2)x+6=0$$
$$x^2-(2a+1)x+10=0$$

dobivamo traženu vrijednost za a. Oduzimanjem druge jednačine od prve dobivamo jednačinu $(a-1)x=4$. Zamjenom vrijednosti za x $(x=4/(a-1))$, u prvu kvadratnu jednačinu i sređivanjem dobivamo kvadratnu jednačinu po a:

$$a^2-8a+15=0,\ \text{čija su rješenja } a=3,\ a=5.$$

Dakle, za $a=3$ ili $a=5$ date kvadratne jednačine imaju zajedničko rješenje. Pronađi to rješenje!

4.206. Iz datih uvjeta možemo odrediti $p=-(x_1+x_2)$ i $q=x_1x_2$, pa tražena kvadratna jednačina ima oblik $x^2+px+q=0$.

$$x_1x_2+x_1+x_2=6a+2 \qquad 3(x_1+x_2)=6a+6 \qquad x_1+x_2=2(a+1)$$
$$x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=0 \Rightarrow 3x_1x_2=12a \Rightarrow x_1x_2=4a.$$

Rezultat.: $x^2-2(a+1)x+4a=0$.

4.207. Prema Vieteovim formulama je: $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$. Dalje vrijedi:

$$(3p^2-16q=0) \Leftrightarrow 3(x_1+x_2)^2-16x_1x_2=0 \Leftrightarrow 3(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-16x_1x_2=0$$
$$\Leftrightarrow 3x_1^2+6x_1x_2+3x_2^2-16x_1x_2=0 \Leftrightarrow 3x_1^2+3x_2^2-10x_1x_2=0$$
$$\Leftrightarrow 3x_1^2-9x_1x_2+3x_2^2-x_1x_2=0 \Leftrightarrow 3x_1(x_1-3x_2)-x_2(x_1-3x_2)$$
$$\Leftrightarrow (x_1-3x_2)(3x_1-x_2)=0 \Leftrightarrow x_1-3x_2=0 \text{ ili } x_2-3x_1=0.$$

4.208. Prema Vieteovim formulama je $x_1+x_2=a$ i $x_1x_2=a$, odakle zaključujemo da je $x_1+x_2=x_1x_2$. Kako je $(x_1-x_2)^2\geq 0$, to dalje, slijedi: $x_1^2+x_2^2\geq 2x_1x_2$, odnosno, $x_1^2+x_2^2\geq 2(x_1+x_2)$.

4.209. $(a-1)^2y^2-2(2a^2+5a+1)y+4a^2+8a+5=0$.

4.210. Diskriminanta kvadratne jednačine je $D(m)=4(4-m)$. Sa $S(m)$ označimo zbir (sumu), a sa $P(m)$ proizvod rješenja, jednačine. Tada vrijedi:

$$S(m)=x_1+x_2=\frac{2(m-1)}{m-3},\quad P(m)=x_1x_2=\frac{m+5}{m-3}.$$

Svi zaključci o prirodi rješenja posmatrane kvadratne jednačine, uključujući i njihove znake, prikazani su u slijedećoj tabeli:

m	D(m)	P(m)	S(m)	Zaključak o rješenjima x_1 i x_2
$(-\infty, -5)$	+	+	+	Rješenja su realni brojevi i vrijedi : $0<x_1<x_2$
-5	+	0	+	$x_1=0$, $x_2=3/2$
(-5, 1)	+	-	+	Rješenja su realni brojevi i vrijedi : $x_1<0<x_2$, $\|x_1\|<\|x_2\|$
1	+	-	0	$x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$
(1 , 3)	+	-	-	Rješenja su realni brojevi i vrijedi : $x_1<0<x_2$, $\|x_1\|>\|x_2\|$
(3 , 4)	+	+	+	Rješenja su realni brojevi i vrijedi : $0<x_1<x_2$
4	0	+	+	$x_{1,2}=3$
$(4, +\infty)$	-	+	+	Rješenja su konjugovano-kompleksni brojevi .

4.211. $x^3+ax^2-ax-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\left[x^2+(a+1)x+1\right]=0$. Da bi rješenja jednačine bila realna diskriminanta kvadratne jednačine $x^2+(a+1)x+1=0$ mora biti nenegativna, tj. mora da vrijedi:

$$D\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a+1)^2-4\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a+1)^2\geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad |a+1|\geq 2$$

$$\Leftrightarrow \quad a+1\leq -2 \vee a+1\geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad a\leq -3 \vee a\geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty,-3]\cup[1,+\infty).$$

5. KVADRATNE FUNKCIJE

5.1. f(0)=5, f(-1)=8, f(2)=11 **5.2.**a) c=f(0)=5 b) c=-7 c) c=10
5.3. a = -1, b=1, c=2 **5.4.** c=-3 **5.5.** b=0, c=-16
5.6. a) x=0

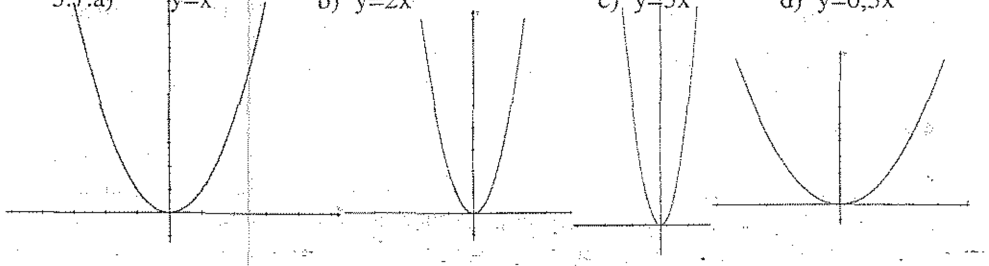
b)

X	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$y=ax^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

c)

x	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$y=ax^2$	$+\infty$	↗	0	↘	$+\infty$

5.7.a) $y=x^2$ b) $y=2x^2$ c) $y=5x^2$ d) $y=0,5x^2$

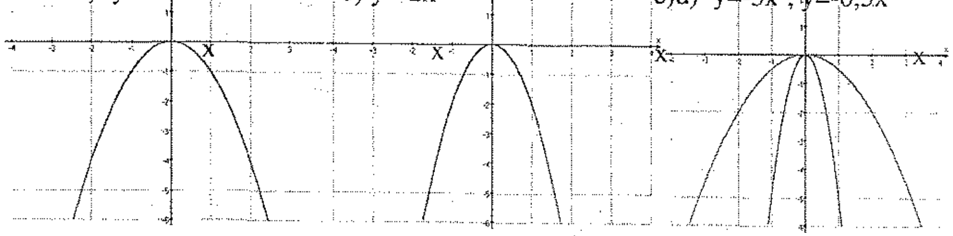


5.8.

x	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

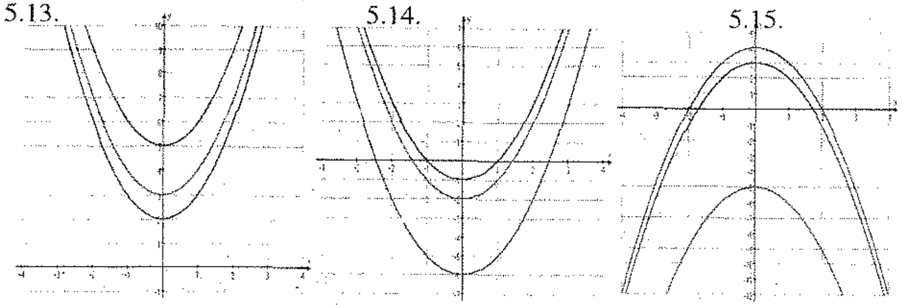
5.9. Svaka posmatrana funkcija ima najmanju vrijednost za x=0, a najveće vrijednosti nema.

5.10.a) $y=-x^2$ b) $y=-2x^2$ c)d) $y=-5x^2$, $y=-0,5x^2$

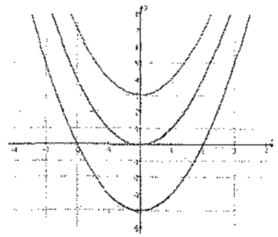


5.12. Sve posmatrane funkcije imaju najveću vrijednost za x=0, a nemaju najmanju vrijednost ni za koju vrijednost varijable x.

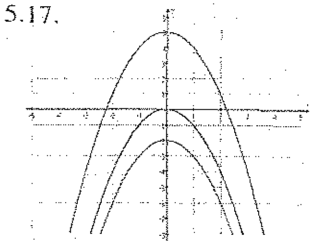
5.13. 5.14. 5.15.



5.16.



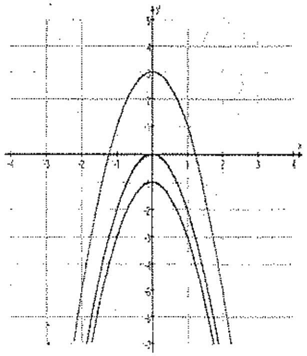
5.17.



5.18.a) $x_{1,2}=\pm 3$ b) $x_{1,2}=\pm 4$ c) $x_{1,2}=\pm 4$
5.19.a) $y_{max}=1$ b) $y_{max}=45$ c) $y_{max}=-2$
5.20.a) $y_{min}=-7$ b) $y_{min}=2$ c) $y_{min}=-12$

5.21.a) Za m<0, $y_{max}=4$; za m>0, $y_{min}=4$ b) Za m<1, $y_{max}=-3$; za m>1, $y_{min}=-3$
c) Za m≠0, $y_{min}=144$

5.22.a) $y=-2x^2$ b) $y=-2x^2+3$ c) $y=-2x^2-1$



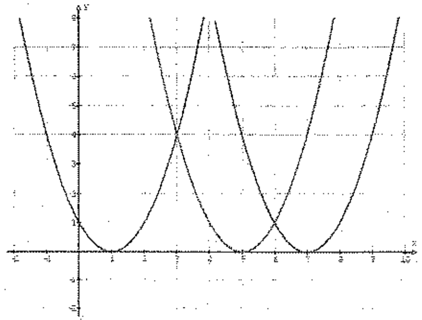
5.23.

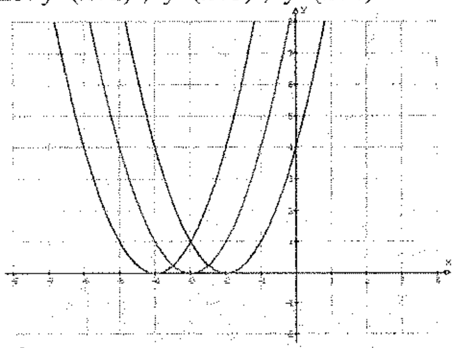
x	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$y=-2x^2$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

x	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$y=-2x^2+3$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

x	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$y=-2x^2-1$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

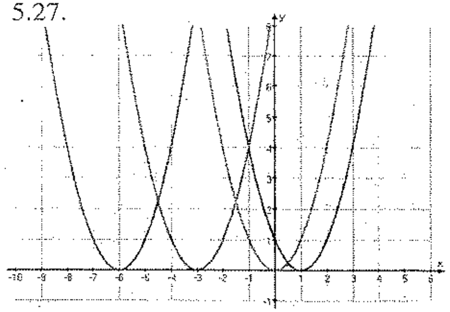
5.24. $y=(x-1)^2$, $y=(x-5)^2$, $y=(x-7)^2$ 5.25. $y=(x+2)^2$, $y=(x+3)^2$, $y=(x+4)^2$



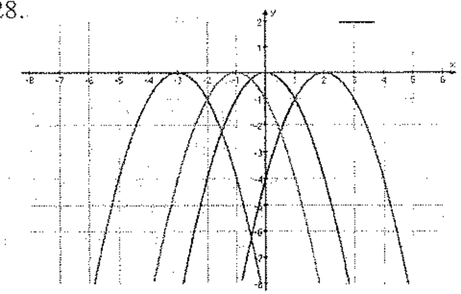


5.26. Translacijom grafika funkcije $y = x^2$ za -m u pravcu x-ose dobivamo grafik funkcije $y=(x+m)^2$

5.27.



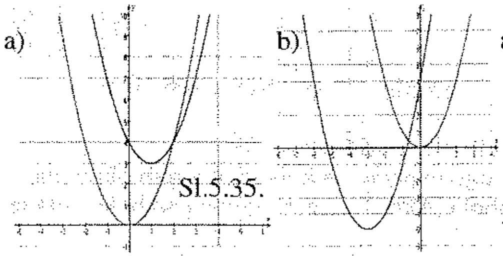
5.28.



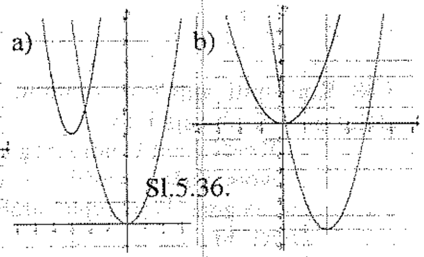
5.29.a) T(-3, 0) b) T(2, 0) c) T(-1, 0)
5.30.a) $(-\infty, 7)$ b) $(-\infty, -1)$ c) $(-\infty, 2)$
5.31.a) $(-\infty, -1)$ b) $(-\infty, 5)$ c) $(-11, +\infty)$ **5.32.**a) x=-5 b) x=15 c) x=-41
5.33. Može se pisati: $y=x^2-12x+36=(x-6)^2$. Nula funkcije je x=6.

5.34.a) $y=(x+2)^2$, T(-2, 0) b) $y=(x-3)^2$, T(3, 0) c) $y=(x+5)^2$, T(-5, 0).

5.35.a) $y=(x-1)^2+3$ b) $y=(x+3)^2-5$ **5.36.**a) $y=2(x+3)^2+4$ b) $y=2(x-2)^2-7$

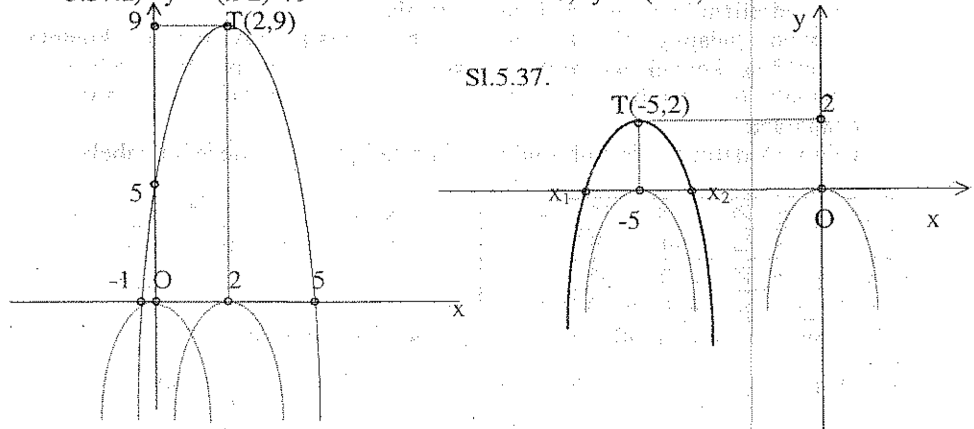


Sl.5.35.



Sl.5.36.

5.37.a) $y = -(x-2)^2+9$ b) $y = -(x+5)^2-2$



Sl.5.37.

5.38.a) $x_1=3$, $x_2=8$ b) $x_1=2$, $x_2=7$ c) $x_1=-5$, $x_2=-1$
5.39.a) $x_1=-1$, $x_2=5/2$ b) $x_1=1/3$, $x_2=5$ c) $x_1=-4$, $x_2=2/5$
5.40. Ako je diskriminanta $D=b^2-4ac$ nenegativna, tada kvadratna funkcija ima realne nule.
a) $D=36>0$, funkcija ima realne nule. b) $D=-204<0$, funkcija nema realnih nula.
c) $D=48>0$, funkcija ima realne nule.

5.41.a) $y_{max}=45$ b) $y_{max}=-12$ c) $y_{max}=23$

5.42.a) $y_{max}=8$ b) $y_{max}=-\dfrac{39}{8}$ c) $y_{max}=\dfrac{13}{12}$

5.43.a) $y_{min}=6$ b) $y_{min}=2$ c) $y_{min}=16$

5.44.a) $y_{min}=-\dfrac{D}{4a}=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=-\dfrac{1-4}{4}=\dfrac{3}{4}$. b) $y_{min}=-\dfrac{145}{8}=-18\dfrac{1}{8}$.

c) $y_{min}=\dfrac{31}{16}=1\dfrac{15}{16}$

5.45.a) $y_{min}=-6$ b) $y_{max}=-3$ c) $y_{max}=3$
5.46.a) $y_{min}=-63$ b) $y_{max}=19$ c) $y_{max}=-5$.

5.47. Koordinate tjemena T parabole date jednačinom $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ su:

$$T\left(-\frac{b}{2a},-\frac{D}{4a}\right),\ \text{odnosno},\ T\left(-\frac{b}{2a},-\frac{4ac-b^2}{4a}\right).$$

a) $T\left(-\frac{1}{2},\frac{31}{4}\right)$ b) $T\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{8}\right)$ c) $T\left(-\frac{1}{6},\frac{61}{12}\right)$

5.48. Kod ispitivanja toka kvadratne funkcije $y = ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, bitno se razlikuju dva slučaja i to:

1) Koeficijent kvadratnog člana je pozitivan ($a>0$):
U ovom slučaju grafik funkcije je parabola koja je otvorom okrenuta prema gore, konkavna parabola. Ako je T(m, n) tjeme parabole, tada je u intervalu
(-∞, m) funkcija opadajuća, a u intervalu **(m, +∞)** funkcija je rastuća.

2) Koeficijent kvadratnog člana je negativan ($a<0$):
I u ovom slučaju grafik funkcije je parabola koja je sada otvorom okrenuta prema dole, konveksna parabola. Ako je T(m, n) tjeme parabole, tada je u intervalu **(-∞, m)** funkcija rastuća, a u intervalu **(m, +∞)** funkcija je opadajuća.

Cijeli tok datih kvadratnih funkcija predstavljen je u slijedećim tabelama.

a)

x	-∞	↗	4	↗	+∞
y	+∞	↘	-4	↗	+∞

b)

x	-∞	↗	1	↗	+∞
y	-∞	↗	36	↘	-∞

c)

x	-∞	↗	27/80	↗	+∞
y	+∞	↘	-1369/160	↗	+∞

Vidimo da su intervali u kojima funkcija raste redom:

a) $(4, +\infty)$ b) $(-\infty, 1)$ c) $(\frac{27}{80}, +\infty)$

5.49.a) $(3, +\infty)$ b) $(\frac{1}{4}, +\infty,)$ c) $(-\infty, -\frac{1}{3})$

5.50.a) $(-\infty, -4)$ b) $(-1, -\infty)$ c) $(-\infty, -\frac{7}{16})$

5.51.a) $(-\infty, -\frac{5}{4})$ b) $(+\infty, -\frac{1}{10})$ c) $(\frac{5}{4}, -\infty)$

5.52. Tražene tačke imaju ordinatu nula, a apscisa je jednaka nuli funkcije.

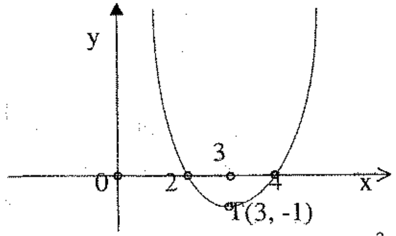
a) A(6, 0), B(15, 0) b) A(5, 0), B(6, 0) c) $A(-\frac{2}{5}, 0)$, (5, 0)

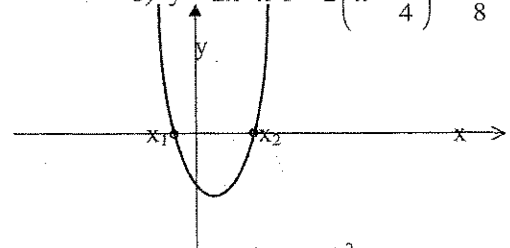
5.53. Tačka u kojoj grafik kvadratne funkcije $y=ax^2+bx+c$ siječe y-osu je C(0, c).

a) C(0, 25) b) C(0, -2) c) C(0, 5)

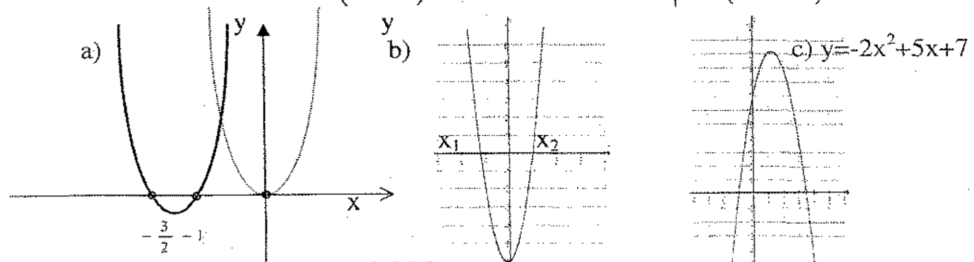
5.54. Za crtanje (skiciranje) grafika kvadratne funkcije koriste se karakteristične tačke i to: koordinate tjemena, presjek grafika (parabole) sa y-osom i nule kvadratne funkcije (ako postoje). Pažljivim spajanjem navedenih tačaka dobijamo skicu grafika koja može poslužiti za dalje proučavanje osobina funkcije.

a) $y = x^2-6x+8 = (x-3)^2-1$ b) $y = 2x^2-x-1 = 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$





5.55.a) $y=2x^2+5x+3 = 2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$ b) $y=5x^2+x-6 = 5\left(x+\frac{1}{10}\right)^2-\frac{119}{20}$



Sl.5.55.

5.56. U zadatku 5.48. raspravljano je o toku kvadratne funkcije. Sada sa skica grafika datih funkcija neposredno čitamo podatke i formiramo tabele:

a

x	-∞	↗	-5/4	↗	+∞
y	+∞	↘	-1/8	↗	+∞

b

x	-∞	↗	-1/10	↗	+∞
y	-∞	↘	-121/20	↗	-∞

c

x	-∞	↗	5/4	↗	+∞
y	+∞	↗	81/8	↘	+∞

5.57. Kvadratna funkcija $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, može se napisati u obliku :

$$y = ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a} = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]$$

gdje je $D = b^2-4ac$, diskriminanta kvadratne funkcije.

Iz dobivenog izraza za kvadratnu funkciju vidimo slijedeće:

1) Ako je diskriminanta $D<0$, to je izraz u srednjoj zagradi uvijek pozitivan,pa znak funkcije zavisi od znaka koeficijenta a. U ovom slučaju funkcija ima isti znak kao a , znači ako je $a>0$ i funkcija je pozitivna, a kada je koeficijent a negativan tada je i funkcija negativna u cijeloj domeni (skupu R).

2) Ako je diskriminanta $D=0$, tada je izraz u srednjoj zagradi nenegativan i jednak je nuli samo za $x=-\frac{b}{2a}$. U ovom slučaju funkcija ima znak

koeficijenta a za sve vrijednosti varijable x osim za $x=-\dfrac{b}{2a}$ (kada je vrijednost funkcije jednaka nuli).

3) Ako je diskriminanta D>0, tada izraz u srednjoj zagradi može biti i pozitivan i negativan. Radi dalje analize, transformišimo taj izraz na slijedeći način:

$$y = ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right]=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=a(x-x_1)(x-x_2),$$ gdje su x_1 i x_2 nule funkcije $y=ax^2+bx+c$, $a\neq0$. Neka je $x_1 < x_2$. Formirajmo slijedeću tabelu:

x	$-\infty$ ↗	x_1	↗	x_2	↗ $+\infty$
$x-x_1$	-	0	+	+	+
$x-x_2$	-	-	-	0	+
$(x-x_1)(x-x_2)$	+	**0**	-	**0**	+

Iz tabele neposredno "čitamo" da je u intervalu (x_1, x_2) izraz $(x-x_1)(x-x_2)$ uvijek negativan, a van tog intervala je pozitivan. Ako, sada, posmatramo izraz $\mathbf{a(x-x_1)(x-x_2)}$, u intervalu (x_1, x_2) znak ovog izraza je suprotan znaku koeficijenta a. Znači, ako je koeficijent a pozitivan tada je izraz $a(x-x_1)(x-x_2)$ negativan, i obrnuto.

Dakle, kada je diskriminanta D kvadratne funkcije pozitivna, tada funkcija ima realne i različite nule x_1 i x_2, $(x_1<x_2)$ i u intervalu (x_1,x_2) funkcija ima znak koji je suprotan znaku koeficijenta a, a u intervalima $(-\infty, x_1)$ i $(x_2, +\infty)$ znak funkcije $y = ax^2+bx+c$, $a\neq0$ se podudara sa znakom koeficijenta kvadratnog člana a.

a) $D=1>0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $a=1>0$. Funkcija je pozitivna u intervalima $(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)$.

b) $D=16>0$, $x_1=-3$, $x_2=1$, $a=-1<0$. Funkcija $y=-x^2-2x+3$ je pozitivna u intervalu $(-3, 1)$.

c) Funkcija $y=2x^2+5x-7$ je pozitivna u intervalima $(-\infty, -\dfrac{7}{2})\cup(1, +\infty)$.

5.58. Data funkcija je negativna u intervalima: a) $(-2, 5)$ b) $(-\infty, 1)\cup(7, +\infty)$ c) $(-\infty, 4)\cup(11, +\infty)$.

5.59 a) $y = x^2-4x+4 = (x-2)^2 \geq 0$

b) $D=-4<0$, $a=1>0$. Funkcija je pozitivna za svaku vrijednost varijable x

c) $D=-7<0$, $a=-1<0$. Funkcija je negativna za svaku realnu vrijednost varijable x.

5.60.a) Koeficijent kvadratnog člana je $a = -1<0$. Za diskriminantu vrijedi $D=4(m^2+2)>0$.

Kvadratna funkcija $y=-x^2+2mx+2$ uvijek ima realne i različite nule x_1 i x_2, $(x_1<x_2)$.

Funkcija je negativna u intervalima $(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$. Funkcija je pozitivna u intervalu (x_1, x_2).

b) Koeficijent kvadratnog člana je $a=1>0$. Diskriminanta funkcije je: $D=4m^2-12m=4(m^2-3m)=4m(m-3)$.
$D>0$ za $m<0$ ili $m>3$; $D<0$ za $0<m<3$; $D=0$ za $m=0$ ili $m=3$.
Za $m=0$, funkcija je pozitivna za svako realno x $(x\neq0)$.
Za $m=0$ i $x=0$, $f(x)=0$,
Za $m=3$, funkcija je pozitivna za svako realno x $(x\neq3)$.
Za $m=3$ i $x=3$, $f(3)=0$.
Za $0<m<3$, funkcija je pozitivna za svako realno x.
Za $m<0$ ili $m>3$ za posmatranu funkciju vrijedi:
U intervalima $(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$ funkcija je pozitivna.
U intervalu (x_1, x_2) funkcija je negativna.
Za $x=x_1$ ili $x=x_2$ funkcija ima vrijednost nula. (Ovdje su x_1 i x_2 nule kvadratne funkcije).

c) Za $m=3$, funkcija je pozitivna za svako x $(x\neq2)$.
Za $m\neq3$, funkcija ima realne nule x_1 i x_2 i vrijedi:
u intervalima $(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$ funkcija je pozitivna.
u intervalu (x_1, x_2) funkcija je negativna.

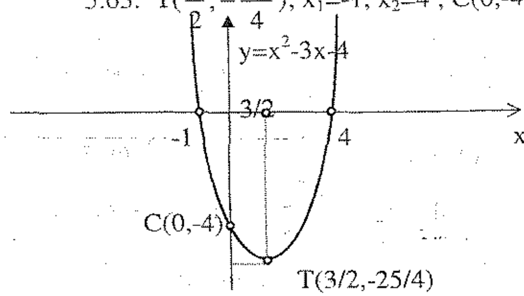
5.61. Kvadratna funkcija je negativna u cijeloj svojoj domeni onda kada je koeficijent kvadratnog člana negativan i kada je njena diskriminanta negativna. Znači mora biti:

$$\begin{matrix} m-3<0 \\ 16-8m<0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} m<3 \\ 8m>16 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} m<3 \\ m>2 \end{matrix} \Leftrightarrow \mathbf{2<m<3}$$

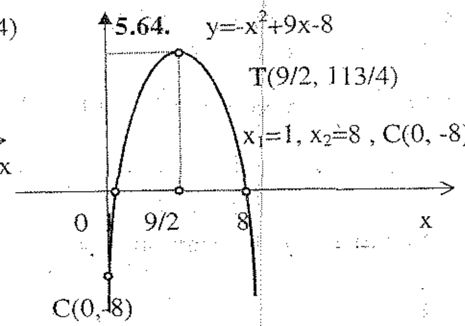
Funkcija je negativna u cijeloj svojoj domeni ako $m\in(2, 3)$.

5.62. $a>0$, $D<0$ => $m>0$.

5.63. $T(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{25}{4})$; $x_1=-1$, $x_2=4$; $C(0,-4)$



5.64. $y=-x^2+9x-8$



5.65. Kvadratnu funkciju $y=3x^2-4x+9$ dovesti na oblik $y=a(x+\alpha)^2+\beta$, a zatim odrediti: nule, ekstrem, intervale monotonosti, znak i koordinate tjemena.

$$y=3x^2-4x+9=3\left(x^2-2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)+9=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{23}{3}.$$

Funkcija nema realnih nula. U intervalu $(-\infty,\frac{2}{3})$ funkcija opada, a u intervalu $(\frac{2}{3},+\infty)$ funkcija raste. Funkcija je pozitivna u cijeloj svojoj domeni (skupu R).

Tjeme ima koordinate $T(\frac{2}{3},\frac{23}{3})$.

5.66. $y=-4x^2+x-3=-4\left(x^2-2\cdot\frac{1}{8}x+\frac{1}{64}-\frac{1}{64}\right)-3=-4\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{47}{16}$.

5.67. $y=-x^2-8x+3=-(x+4)^2+19$. .... **5.68.** $y=-2x^2+x-3$ **5.69.** $y=3x^2+3x+1$

5.70. $ax^2+bx+c=$

$$=a\left(x^2-2x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

a) $T\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)=T\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

b) Za $a>0$, $y_{min}=\frac{4ac-b^2}{2a}$, za $x=-\frac{b}{2a}$; za $a<0$, $y_{max}=\frac{4ac-b^2}{2a}$, za $x=-\frac{b}{2a}$

5.71. $a=-2$ **5.72.** $y=-\frac{3}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}$ **5.73.** $k=-3$

5.74. Ako su (x, y) koordinate tjemena parabole, tada vrijedi

$$x=\frac{1}{k},\ y=\frac{4k-4}{4k}=\frac{k-1}{k}=1-\frac{1}{k}=1-x$$

Znači, tjemena skupa parabola pripadaju pravoj čija je jednačina $x+y-1=0$.

5.75. Traženi skup tačaka je parabola $y=-\frac{1}{9}\cdot x^2$.

5.76.* $y=3(x-2)^2+6=3(x^2-4x+4)+6=3x^2-12x+18$; $y=3x^2-12x+18$.

5.77.* $y=-3x^2-18x-32$.

5.78. Data parabola je $y=2x^2-6x+1=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$. a) $y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}=-2x^2+6x-1$

b) $y=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}=2x^2+6x+1$ c) $y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}=-2x^2+6x-8$

5.79. Neka su a i b dužine stranica pravougaonika. Tada je $2a+2b=8$, odnosno, $a+b=4$. $P=ab$, $P(a)=a(4-a)=-a^2+4a$. $P_{max}=4$, za $a=2$.

5.80. $a=b=10$ **5.81.** Ako je osnovica $a=12\sqrt{2}$

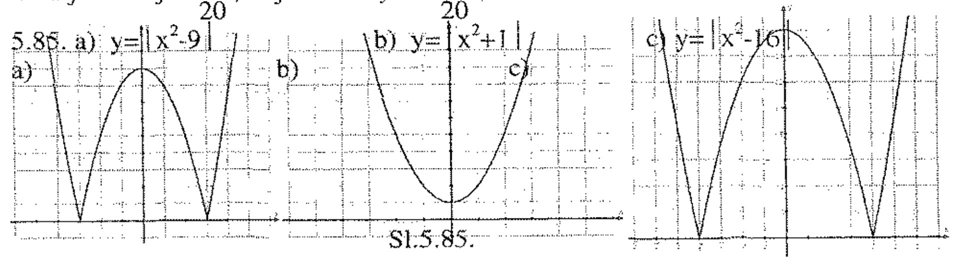
5.82. 16=8+8. (Suma kvadrata sabiraka broja 16 je najmanja ako su sabirci jednaki). **5.83.** 10=5+5

5.84. $2x+4y=1 \Leftrightarrow 2x=1-4y \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}-2y \Rightarrow x^2=\frac{1}{4}-2y+4y^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2+y^2=5y^2-2y+\frac{1}{4}.$$

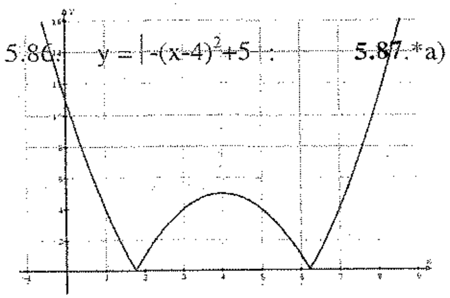
Kako kvadratni trinom $5y^2-2y+\frac{1}{4}$ ima najmanju vrijednost za $y=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ i ta vrijednost je $\frac{1}{20}$, to je $x^2+y^2\geq\frac{1}{20}$.

5.85. a) $y=|x^2-9|$ b) $y=|x^2+1|$ c) $y=|x^2-16|$

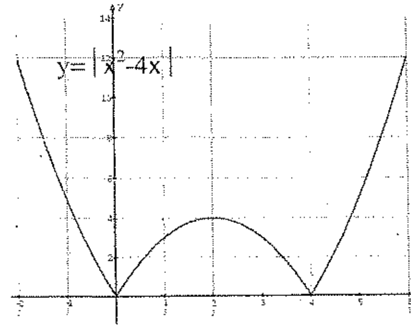


Sl.5.85.

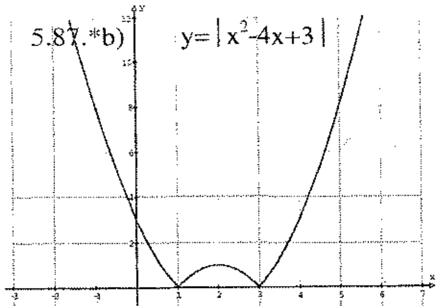
5.86. $y=|-(x-4)^2+5|$; **5.87.** *a) $y=|x^2-4x|$

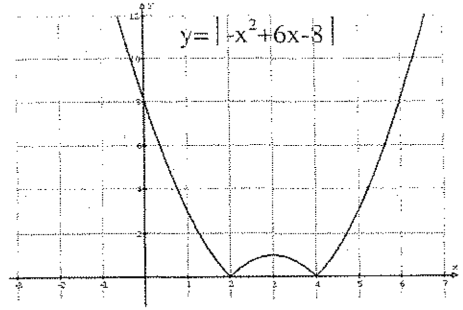


Sl.5.86.



5.87.*b) $y=|x^2-4x+3|$ c) $y=|-x^2+6x-8|$



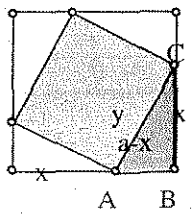


5.88. $a=-\frac{3}{4}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=9/4$ **5.89.*** Skup tjemena je prava $x=3$.

5.90.* Uputa: Izraziti koordinate tjemena u funkciji od k, a zatim eliminisati k. Traženi skup tačaka je parabola $y=-x^2+x-4$.

$5.91.\ y_{min} = -\dfrac{m^2-16}{4},\ y_{min}=0\ \ za\ \ m=\pm 4.$

5.92.* Iz pravouglog ΔABC dobijamo $y^2=2x^2-2ax+a^2$. Najmanja vrijednost varijable y^2, pa i y (jer je y>0) je ona za koju kvadratni trinom $2x^2-2ax+a^2$ ima najmanju vrijednost: $x=a/2$.



Sl.5.92.

To znači da upisani kvadrat ima vrhove u središtima stranica datog kvadrata.
Stranica datog kvadrata je $y=a(\sqrt{2})/2$.

5.93.* Traženi trougao je jednakokraki pravougli trougao.

5.93.* Traženi trougao je jednakokraki pravougli trougao.

5.94.* Stranice pravougaonika su $a=R\sqrt{2}$ i $b=R\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6. KVADRATNA NEJEDNAČINA I SISTEMI KVADRATNIH NEJEDNAČINA

6.1.a) $x_1=1,\ x_2=7$ b) $x_1=-5,\ x_2=1$ c) $x_1=-7,\ x_2=-3$ d) $-4,\ 5$

6.2.a) $x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$ b) $x^2+10x+25=(x+5)^2\geq 0$

c) $-x^2+8x-16=-(x-4)^2\leq 0.$ d) $-2(x-3)^2\leq 0$

6.3.a) $x^2+3x>0 \Leftrightarrow x(x+3)>0$.

Prvi način: $x(x+3)>0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x>0 \\ x+3>0 \end{matrix} \vee \begin{matrix} x<0 \\ x+3<0 \end{matrix} \Leftrightarrow x>0 \vee x<-3$.

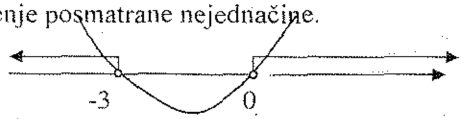
Rezultat: $x\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$.

Drugi način: Zadatak možemo riješiti pomoću slijedeće tabele (Vidi zadatak 5.57.):

x	$-\infty$ ↗	-3	↗	0	↗ $+\infty$
x	-	-	-	0	+
x+3	-	0	+	-	+
x(x+3)	+	0	-	0	+

Iz tabele se čita znak izraza $x(x+3)$. Vidimo da je $x(x+3)>0$ u dva intervala i to: $(-\infty,-3)$ i $(0,+\infty)$.

Treći način: Skiciranjem grafika funkcije $y=x^2+3x$, određujemo znak kvadratne funkcije, pa i rješenje posmatrane nejednačine.



Sa skice vidimo da je funkcija pozitivna u intervalima $(-\infty,-3)$ i $(0,+\infty)$, pa je rješenje nejednačine $x^2+3x>0$ skup svih realnih brojeva x za koje vrijedi $x\in(-\infty,-3)U(0,+\infty)$.

b) $x\in(-1,0)$ c) $x\in(-\infty,0)U(2,+\infty)$ d) $x\in(-\infty,-7)U(0,+\infty)$.

6.4.a) $x\in(0,5)$ b) $x\in(-\infty,0)U(1/4,+\infty)$

c) $x\in(-\infty,-5/6)U(0,+\infty)$ d) $x\in(-4,0)$.

6.5.a) $0\leq x\leq\dfrac{2}{3}$ b) $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{6}\right]\cup[0,+\infty)$

c) $x\in[-6,0]$ d) $x\in(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$

6.6.a) $0\leq x\leq 5$ b) $0\leq x\leq 4$ c) $-\infty<x\leq -5 \vee x\geq 5$ d) $0\leq x\leq 2$

6.7.a) $x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2$ b) $x<-3 \vee x>3$

c) $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ d) $-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$

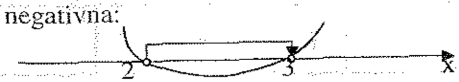
6.8.a) $-6\leq x\leq 6$ b) $x\leq -4 \wedge x\geq 4$

c) $-\dfrac{5}{2}\leq x\leq\dfrac{5}{2}$ d) $x\leq -\dfrac{4}{3} \vee x\geq\dfrac{4}{3}$

6.9.a) $x^2-5x+6<0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)<0$. Dalje je ova nejednačina ekvivalentna sa unijom dva sistema nejednačina....

Možemo koristiti i tabelarno rješavanje nejednačine.

Najefikasnije je skicirati grafik kvadratne funkcije $y=x^2-5x+6$ i sa grafika pročitati kada je ta funkcija negativna:



Rezultat: $2<x<3$. b) $4<x<5$ c) $x<-5 \vee x>3$ d) $x<1 \vee x>6$

6.10.a) $x\in(-\infty,1)\cup(7,+\infty)$ b) $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

c) $x\in(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$ d) $x\in[-3,8]$

6.11.a) $x\in(-\dfrac{3}{2},1)$ b) $x\in(2,\dfrac{7}{3})$ c) $x\in(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5})$ d) $x\in(-\dfrac{4}{5},7)$

6.12.a) $x\in(-\infty,+\infty)$ b) $x\in\varnothing$ c) $x\in(-\infty,+\infty)$ d) $x\in\varnothing$

6.13.a) $x\in(3,5)$ b) $x\in(-\infty,-2)\cup(11,+\infty)$ c) $x\in\varnothing$

d) x je proizvoljan realan broj

6.14.a) Množenjem date nejednačine sa $(x+4)^2$, $x\neq -4$, dobivamo $(x-3)(x+4)<0$.
Rezultat: $x\in(-4,3)$. b) $x\in(-1,2)$

c) Množenjem nejednačine sa $(x+5)^2$, $x\neq -5$, i sređivanjem nastaje kvadratna nejednačina $x^2-3x-40>0$, odnosno, $(x+5)(x-8)>0$.
Rezultat: $x\in(-\infty,-5)\cup(8,+\infty)$.

d) Množenjem nejednačine sa $(x+5)^2$, $x\neq -5$, i sređivanjem dobijamo nejednačinu $3x^2+22x+65>0$. Diskriminanta ove nejednačine je negativna, a koeficijent kvadratnog člana pozitivan, pa je trinom $3x^2+22x+65$ pozitivan za svaku realnu vrijednost varijable x. Rezultat: $x\in(-\infty,+\infty)$.

6.15.a) Kvadratni trinom x^2+2x+8 je pozitivan za svaku vrijednost varijable x (Zašto?), pa je data nejednačina ekvivalentna sa nejednačinom $x^2-2x-3>0$.
Rezultat: $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

b) Kvadratni trinom u brojniku razlomka na lijevoj strani date nejednačine x^2+4x+5 je pozitivan za svaku vrijednost varijable x, pa je data nejednačina ekvivalentna sa nejednačinom $x^2-5x+6<0$. Rezultat: $x\in(2,3)$.

c) $x\in\varnothing$ d) $x\in R$

6.16.a) Nejednačina je ekvivalentna sa $x^2-7x+12>0$. Rezultat: $x\in(-\infty, 3)\cup(4, +\infty)$.

b) Nejednačina je ekvivalentna sa $x^2+7x+10<0$. Rezultat: $x\in(-5, -2)$.

c) $x<5 \lor x>6$ d) $-\frac{1}{2}<x<1$

6.17.a) $x^2-1<0 \land x^2-4<0 \Leftrightarrow x^2<1 \land x^2<4 \Leftrightarrow -1<x<1 \land -2<x<2 \Leftrightarrow -1<x<1$.

b) $x^2>9 \land x^2-16<0 \Leftrightarrow (x<-3 \lor x>3) \land -4<x<4 \Leftrightarrow -4<x<-3 \lor 3<x<4$.

c) Sistem možemo efikasno riješiti primjenom tabele:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
x-1	-	-	-	-	-	0	+
$x^2-x=x(x-1)$	+	+	+	0	-	0	+
x+1	-	0	+	+	+	+	+
$x^2+x=x(x+1)$	+	0	-	0	+	+	+
Rješenje sistema $x^2-x<0 \land x^2+x>0$	+	0	-	0	-	0	+

Iz tabele vidimo da je rješenje sistema interval (0, 1).

6.18.a) $2<x<3$ b) $x<-7 \lor x>1$ c) Nema rješenja.

6.19.a) Nema rješenja. b) $0<x<4$ c) $-1<x<-\frac{1}{8}$, $0<x<\frac{1}{2}$.

6.20.a) $x\in(6, 9)$ b) $x\in(-4, -2)\cup(4, \frac{9}{2})$

6.21.a) $\frac{x-1}{x^2-4}>0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{(x-2)(x+2)}>0$. Formirajmo tabelu iz koje ćemo odrediti rješenja:

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
x-2	-	-	-	-	-	0	+
x+2	-	0	+	+	+	+	+
(x-2)(x+2)	+	0	-	-	-	0	+
x-1	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)}$	-	Nije def.	+	0	-	Nije def.	+

Rezultat: $x\in(-2, 1)\cup(2, +\infty)$.

b) $x\in(-\infty, -4)\cup(-3, -2)$ c) $x>\frac{3}{2}$ d) $-\frac{3}{2}<x<2$, $2<x<+\infty$.

6.22.a) $x\in(-4, 1)$ b) $x\in(-2, -1)\cup(0, +\infty)$

c) x je proizvoljan realan broj d) $x\in(-\infty, -1)\cup(0, \frac{1}{2})\cup(1, +\infty)$

6.23.a) $x\in(3, 5)$ b) $x\in(-\infty, 1)\cup(2, 5)\cup(7, +\infty)$

c) Nema rješenja d) Proizvoljno realno x osim 1.

6.24.a)

x	$-\infty$ -3	-2	5	$+\infty$
x+3	- 0	+	+	+
x-5	-	-	- 5	+
x+2	-	- 0	+	+
(x+3)(x-5)(x+2)	- 0	+ 0	- 0	+

Rezultat: $x\in(-\infty, -3)\cup(-2, 5)$ b) $x\in(-8, 1)\cup(2, 4)$

c) $x\in(-\infty, -33)\cup(-11, 3)\cup(5, +\infty)$

6.25.a) $x\in(-3, -2)\cup(2, 4)\cup(4, +\infty)$ b) $x\in(-\infty, -7)\cup(-7, -4)\cup(1, 3)$

6.26.a) Funkcija je definirana za one vrijednosti varijable x za koju je radikant nenegativan: $x^2-81\geq 0 \Leftrightarrow x\leq-9, x\geq 9$. Domena funkcije je skup $\{x|(x\leq-9) \lor (x\geq 9)\}$.

b) Domena funkcije je skup svih realnih brojeva R. c) $-1\leq x\leq 1$

6.27.a) $x\leq\frac{1}{5}$, $x\geq 1$ b) $x=1$ c) $-\frac{2}{5}\leq x\leq 2$

6.28.a) $\frac{x-1}{x^2-x-2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{(x+1)(x-2)}\geq 0 \Rightarrow -1<x\leq 1, x>2$.

b) $-3\leq x<-1$, $-1<x<+\infty$ c) Domena je skup $R\setminus\{1, 11\}$.

6.29.a) $m=-1$, $m=-\frac{1}{5}$ b) $m<-1$, $m>-\frac{1}{5}$ c) $-1<m<-\frac{1}{5}$.

6.30.a) $m=\frac{3}{7}$, $m=5$ b) $\frac{3}{7}<m<5$ c) $m<\frac{3}{7}$, $m>5$.

6.31. $a>2$. **6.32.** $m\in(-4, -3]$. **6.33.** $m\in(0, 4)$. **6.34.** $m=2$

6.35. $-3+2\sqrt{2}<m<0$

6.36. $\frac{x_1^2}{x_2^2}+\frac{x_2^2}{x_1^2}>2 \Leftrightarrow \frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^2x_2^2}>2 \Leftrightarrow \frac{(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2}{x_1^2x_2^2}>2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2-2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^2}>2$$

Kako je, prema Vieteovim formulama, $x_1+x_2=-2m$ i $x_1x_2=4$, dalje vrijedi:

$$\frac{[(-2m)^2-2\cdot 4]^2-2\cdot 4^2}{4^2}>2 \Leftrightarrow \frac{[4m^2-8]^2-32}{16}>2 \Leftrightarrow (m^2-2)^2-2>2 \Leftrightarrow (m^2-2)^2>4$$

$$\Leftrightarrow m^2-2<-2 \lor m^2-2>2 \Leftrightarrow m^2>4 \Leftrightarrow m<-2 \lor m>2.$$

6.37. Kvadratni trinom ax^2+bx+c je pozitivan za svako realno x ako je koeficijent a pozitivan i diskriminanta $D=b^2-4ac$ negativna. Rezultat: $m>2$.

6.38. Kvadratni trinom ax^2+bx+c je negativan za svako realno x ako je koeficijent a negativan i diskriminanta $D=b^2-4ac$ negativna. Rezultat: $m<-\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

6.39.a) $2 < m < 4$ b) $1 < m < 9$

6.40.* Pošto za brojnik razlomka vrijedi: $x^2-4x+5>0$ (jer je diskriminanta trinoma $D=-4$, negativna, a koeficijent kvadratnog člana $a=1$ pozitivan), to je funkcija $f(x)$ pozitivna za svako realno x onda kada je nazivnik pozitivan za svako x. Izraz $(m+1)x^2-3mx+m+8$ je pozitivan za svako x ako su ispunjena dva uvjeta i to:

1) ako je koeficijent kvadratnog člana, $m+1$, pozitivan i
2) ako je diskriminanta trinoma, $D=9m^2-4(m+1)(m+8)$, negativna.

Prvi uvjet je ispunjen za $m>-1$. Izvršavanjem operacija u drugom uvjetu dobijamo: $D=5m^2-36m-32$. Kvadratni trinom $5m^2-36m-32$ ima nule $m=-\frac{4}{5}$ i $m=8$ i negativan je za sve vrijednosti varijable m koja zadovoljava uvjete $-\frac{4}{5}<m<8$.

Sada vidimo da su oba uvjeta ispunjena za $-\frac{4}{5}<m<8$. Funkcija $f(x)$ je pozitivna za svako realno x, ako parametar m zadovoljava uvjete $-\frac{4}{5}<m<8$. **6.41**. $m<-\frac{1}{2}$

6.42.a) Neka je $x\geq 0$. Tada je $|x|=x$, pa je data nejednačina ekvivalentna slijedećim: $x^2-x-6>0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)>0 \Rightarrow x<-2,\ x>3$. Postavljeni uvjet ispunjava samo $x>3$.
Uzmimo sada da je $x<0$. U ovom slučaju je $|x|=-x$ pa je data nejednačina ekvivalenta nejednačini $x^2+x-6>0$. Ovu nejednačinu zadovoljavaju brojevi $x<-3$, $x>2$. Postavljeni uvjet ispunjava samo $x<-3$. Rezultat: $x<-3$, $x>3$.

b) $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<x<1,\ 1<x<2$ c) $x<2,\ x>\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

6.43.a) $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ b) $-2-\sqrt{6}<x<-2-\sqrt{2},\ \ -2+\sqrt{2}<x<-2+\sqrt{6}$

c) $x<2-\sqrt{5}$, $x>2+\sqrt{5}$

6.44.a) $x<-3,\ x>1$ b) $x\in\varnothing$ c) $x<-\frac{1}{2}\ \vee\ x>\frac{1}{2}$.

6.45.* Kvadratni trinom pod korijenom mora biti nenegativan za svaku vrijednost varijable x. Rezultat: $m\geq 1$.

6.46.a) Ako je $a<-\frac{1}{4}$, tada je svaki realan broj rješenje jednačine, $(x\in R)$. Ako je

$a=-\frac{1}{4}$, tada je $x\in R\setminus\{-2\}$

Ako je $a>-\frac{1}{4}$, tada je $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$.

b) Ako je $|a|>\sqrt{24}$, tada je $\frac{-a-\sqrt{a^2-24}}{4}<x<\frac{-a+\sqrt{a^2-24}}{4}$;

ako je $|a|\leq\sqrt{24}$, tada nejednačina nema rješenja.

c) Ako je $a<1$, tada je $x<1-\sqrt{1-a}$ i $x>1+\sqrt{1-a}$;

Ako je $a=1$, tada je x proizvoljan realan broj različit od broja 1,

d) Ako je $a>0$, tada je $x_1<x<x_2$, ako je $a<-20$, tada je

$x<\min(x_1, x_2)$ ili $x>\max(x_1, x_2)$.

Ako je $-20<a\leq 0$, tada je x proizvoljan realan broj, ako je $a=-20$, x je tada proizvoljan broj osim $-0{,}5$. Ovdje su x_1 i x_2 nule kvadratnog trinoma ax^2+ax-5.

6.47.* U ovom zadatku treba ispitati prirodu rješenja kvadratne jednačine u zavisnosti od vrijednosti parametra koji se u njoj pojavljuje.

a) Sa $D(m)$ označimo diskriminantu, sa $P(m)$ proizvod rješenja i sa $Z(m)$ zbir rješenja date jednačine. Tada vrijedi: $D(m)=4(36-9m)$, $P(m)=m^2+9m-36$, $Z(m)=2m$. Znaci izraza $D(m)$, $P(m)$ i $Z(m)$ kao i priroda rješenja kvadratne jednačine dati su u slijedećoj tabeli:

m	D(m)	P(m)	Z(m)	Priroda rješenja x_1 i x_2
$(-\infty, -12)$	+	+	-	Rješenja su realni brojevi i $x_1<x_2<0$
-12	+	0	-	$x_1=-24,\ x_2=0$
$(-12, 0)$	+	-	-	rješenja su realna i $x_1<0<x_2$, $\|x_1\|>\|x_2\|$
0	+	-	0	$x_{1,2}=\pm 6$
$(0, 3)$	+	-	+	Rješenja su realna i $x_1<0<x_2$, $\|x_1\|<\|x_2\|$
3	+	0	+	$x_1=0,\ x_2=6$
$(3, 4)$	+	+	+	Rješenja su realna i $0<x_1<x_2$
4	0	+	+	$x_1=x_2=4$
$(4, +\infty)$	-	+	+	Rješenja su konjugovano-kompleksni brojevi.

b) $x^2-2(k-3)x-(5k-11)=0 \Rightarrow D(k)=4(k+1)(k-2)$, $P(k)=11-5k$, $Z(k)=2(k-3)$.

k	D(k)	P(k)	Z(k)	Priroda rješenja x_1 i x_2
$(-\infty, -1)$	+	+	-	Rješenja su realni brojevi i $x_1<x_2<0$
-1	0	+	-	$x_1=-4,\ x_2=-4$
$(-1, 2)$	-	+	-	Rješenja su konjugovano-kompleksni brojevi.
2	0	+	-	$x_{1,2}=-1$
$\left(2, \frac{11}{5}\right)$	+	+	-	Rješenja su realna i $x_1<x_2<0$.
$\frac{11}{5}$	+	0	-	$x_1=0,\ x_2=-\frac{8}{5}$.
$\left(\frac{11}{5}, 3\right)$	+	-	-	Rješenja su realna i $x_1<0<x_2$, $\|x_1\|>\|x_2\|$
3	+	-	0	$x_{1,2}=\pm 2$
$(3, +\infty)$	+	-	+	Rješenja su realna i $x_1<0<x_2$, $\|x_1\|<\|x_2\|$

c) $-1<k<\frac{7}{5}$, x_1, x_2 su konjugirano-kompleksni brojevi.

$k\le 1,\ k\ge\frac{7}{5}$, x_1, x_2 su realni brojevi, ... **6.48.** $-7<k<1$

6.49.* Uputa: Označiti vrijednost funkcije, recimo sa m, formirati kvadratnu jednačinu u zavisnosti od parametra m i odrediti one vrijednosti parametra m za koje kvadratna jednačina ima realna rješenja. Skup tih vrijednosti je kodomena funkcije.

a) $\{x|\ 0\le x<2\}$ b) $\left\{x\middle|-1\le x<\frac{3}{2}\right\}$ c) $\left\{x\middle|\frac{18-2\sqrt{43}}{19}\le x\le\frac{18+2\sqrt{43}}{19}\right\}$

6.50.*a) Neka broj α pripada intervalu (x_1, x_2). Tada brojevi a i $f(\alpha)$ uvijek imaju suprotne predznake, pa vrijedi $a\cdot f(\alpha)<0$.

Neka je $a\cdot f(\alpha)<0$. Ako bi jednačina imala jednaka rješenja $x_1=x_2$, tada bi brojevi a i $f(\alpha)$ imali isti znak za sve vrijednosti od α (osim $\alpha=-\frac{b}{2a}$), pa dati uslov ne bi bio ispunjen. Znači rješenja x_1 i x_2 su različita.

Ako bi rješenja jednačine bila konjugirano-kompleksna tada bi brojevi a i $f(\alpha)$ uvijek imali isti znak, pa dati uslov ne bi bio ispunjen.

Ostao je jedini mogući slučaj da rješenja jednačine budu realni i različiti brojevi, što je i trebalo dokazati.

6.51.a) Mora biti ispunjen uvjet $(m+4)f(3)<0$, odnosno $(m+4)(m-11)>0$.
Rezultat.: $m<-4 \vee m>11$ b) $0<m<4$

6.52.a) Oba rješenja jednačine $x^2-2(m+1)x-4m-7=0$ biće veća od -3 ako su ispunjeni slijedeći uvjeti: $D\ge0$, $af(-3)>0$, $-\frac{b}{2a}>-3$, odnosno,

$$\left.\begin{array}{r}4(m+1)^2+4(4m+7)\ge0\\ 9+6(m+1)-4m-7>0\\ m+1>-3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}m\le-4\ \vee\ m\ge-2\\ m>-4\\ m>-4\end{array}\right\}\Leftrightarrow\quad \mathbf{m\ge-2}.$$

b) $x\le\frac{-1-\sqrt{17}}{8}$, $\frac{-1+\sqrt{17}}{8}\le x<\frac{10}{13}$

6.53. $m<-3 \vee m>5$. **6.54.** $m\in\left(-\frac{3}{2}, \frac{12}{7}\right)$.

7. NEKE JEDNAČINE VIŠEG REDA

7.1. Bikvadratna jednačina (jednadžba)

7.1.a) $x^4-16x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x^2-16)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \vee x^2-16=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=0,\ x_{3,4}=\pm4$
b) $x_{1,2}=0,\ x_{3,4}=\pm6$ c) $x_{1,2}=0,\ x_{3,4}=\pm7i$ d) $x_{1,2}=0,\ x_{3,4}=\pm8i$
7.2.a) $x_{1,2}=0,\ x_{3,4}=\pm5i$ b) $x_{1,2}=0,\ x_{3,4}=\pm12$ c) $x_{1,2}=0,\ x_{3,4}=\pm15$

d) $x_{1,2}=0,\ x_{3,4}=\pm13i$
7.3.a) Smjenom $x^2=t \Rightarrow x^4=t^2$ data bikvadratna jednačina postaje kvadratna po varijabli t: $t^2-13t+36=0$ čija su rješenja $t_1=4$, $t_2=9$.
$x^2=t \Rightarrow x^2=t_1 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_{1,2}=\pm2$; $x^2=t \Rightarrow x^2=t_2 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x_{3,4}=\pm3$.
b) $x_{1,2}=\pm3,\ x_{3,4}=\pm2i$ c) $x_{1,2}=\pm1,\ x_{3,4}=\pm2$ d) $x_{1,2}=\pm1,\ x_{3,4}=\pm4$
7.4.a) $x_{1,2}=\pm5,\ x_{3,4}=\pm3i$ b) $x_{1,2}=\pm6,\ x_{3,4}=\pm i$ c) $x_{1,2}=\pm5,\ x_{3,4}=\pm i$
d) $x_{1,2}=\pm8,\ x_{3,4}=\pm i$

7.5.a) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{3},\ x_{3,4}=\pm\frac{1}{9}$ b) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2},\ x_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$

c) $x_{1,2}=\pm\frac{2}{3},\ x_{3,4}=\pm\frac{1}{3}$ d) $x_{1,2}=\pm3,\ x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

7.6.a) $x_{1,2}=\pm2,\ x_{3,4}=\pm i$ b) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5+2\sqrt{6}},\ x_{3,4}=\pm\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

c) $x_{1,2}=\pm\frac{3}{2},\ x_{3,4}=\pm i$ d) $x_{1,2}=\pm i\sqrt{2},\ x_{3,4}=\pm i\frac{2\sqrt{3}}{3}$

7.7.a) $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_{3,4}=\pm\frac{i}{3}$ b) $x_{1,2}=\pm1,\ x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}$
c) $x_{1,2}=\pm2,\ x_{3,4}=\pm5i$ d) $x_{1,2}=\pm2i,\ x_{3,4}=\pm3i$

7.8.a) $x_{1,2}=\pm\frac{a}{2},\ x_{3,4}=\pm\frac{b}{2}$ b) $x_{1,2}=\pm\sqrt{a},\ x_{3,4}=\pm\sqrt{b}$ c) $x_{1,2}=\pm m,\ x_{3,4}=\pm4$
7.9.a) $x_{1,2}=\pm m,\ x_{3,4}=\pm3$ b) $x_{1,2}=\pm m,\ x_{3,4}=\pm2$ c) $x_{1,2}=\pm1,\ x_{3,4}=\pm a^2$
7.10.a) $x_{1,2}=\pm\sqrt{a+b},\ x_{3,4}=\pm\sqrt{a-b}$ b) $x_{1,2}=\pm2\sqrt{m},\ x_{3,4}=\pm3\sqrt{m}$
c) $x_{1,2}=\pm(a+b), x_{3,4}=\pm(a-b)$
7.11.a) $x_{1,2}=\pm1,\ x_{3,4}=\pm5$ b) $x_{1,2}=\pm2,\ x_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$
7.12.a) $x_1=-3,\ x_2=-2,\ x_3=0,\ x_4=1$ b) $x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=4,\ x_4=6$
c) $x_1=-2,\ x_2=0,\ x_3=1,\ x_4=3$
7.13.*a) Uputa: Uvođenjem smjene $x^2-5x=t$, data jednačina se transformiše u kvadratnu jednačinu po t : $t^2-32t-144=0$ čija su rješenja $t_1=36$ i $t_2=-4$.

Rezultat: $x_1=-4,\ x_2=1,\ x_3=4,\ x_4=9$. b) -2, 1, $\frac{-1\pm i\sqrt{19}}{2}$

7.14.a) Ako uvedemo smjenu $x^2=t$ dobićemo $t_1=4$ i $t_2=49$. Tražena bikvadratna jednačina je: $x^4-53x^2+196=0$. b) $x^4-3x^2+2=0$ c) $x^4+16x^2-225=0$
7.15.a) $x^4-12x^2-64=0$ b) $x^4+10x^2+9=0$ c) $x^4+10x^2+169=0$
7.16.a) Uvođenjem smjene $x^{-2}=t$, data jednačina se transformiše u kvadratnu po nepoznatoj t $t^2-5t-36=0$. Rješenja ove jednačine su $t_1=9$ i $t_2=-4$. Iz $x^{-2}=9$ dobijamo $x_1=-\frac{1}{3}$, $t_2=\frac{1}{3}$. Iz $x^{-2}=-4$ dobijamo $x_3=-\frac{i}{2}$, $x_4=\frac{i}{2}$.

b) $x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=-\frac{i}{3},\ x_4=\frac{i}{3}$ c) $x_1=-\frac{1}{4},\ x_2=\frac{1}{4},\ x_3=-i,\ x_4=i$

7.17.a) Uvesti smjenu $x=t^2$. Rezultat: $x_1=1$, $x_2=16$. b) $x=9^4=6561$ c) $x_1=-8$, $x_2=8$.

7.18.a) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm1{,}5i\sqrt{2}$ b) Transformacijom jednačine dobivamo $x^4-7x^2=0$, odakle, s obzirom da je $x\neq0$, dobivamo $x_{1,2}=\pm\sqrt{7}$.

7.19. Transformacijom izraza dobivamo bikvadratnu jednačinu

$$5x^4-3(2a^2+1)x^2+a^2(a^2+3)=0.$$

Rezultat: $x_{1,2}=\pm|a|,\ x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{a^2+3}{5}}$

7.20. $$x_1+x_2+x_3+x_4=-\sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}}-\sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}}+\sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}}+\sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}}=0$$

$$x_1x_2x_3x_4=\left(-\sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}}\right)\left(-\sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\cdot\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\cdot\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(-p)^2-\left(\sqrt{p^2-4q}\right)^2}{4}}\cdot\sqrt{\frac{(-p)^2-\left(\sqrt{p^2-4q}\right)^2}{4}}=\sqrt{\frac{p^2-(p^2-4q)}{4}}\cdot\sqrt{\frac{p^2-(p^2-4q)}{4}}=\sqrt{q}\cdot\sqrt{q}=q.$$

7.21. Dokaz provodimo kao u prethodnom zadatku.

7.22. $x^4-29x^2+100=0$

7.23. Iz date nejednačine dobije se:

$$x_1=\sqrt{\frac{3m+2+\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}},\ x_2=\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}.$$

Iz datog uvjeta $x_1=3x_2$, dobivamo kvadratnu jednačinu $19m^2-108m-36=0$, čija su rješenja $m=6$ i $m=-\frac{6}{19}$.

7.24.* Zamjenom varijable $x=y+m$ u datu jednačinu i sređivanjem dobijamo jednačinu

$ay^4+(4am+b)y^3+(6am^2+3bm+c)y^2+(4am^3+3bm^2+2cm+d)y+(am^4+bm^3+ch^2+dh+e)=0$

Iz prethodne jednačine vidimo da ona postaje bikvadratna po varijabli y pod uvjetima: $(4am+b=0)\ \wedge\ (4am^3+3bm^2+2cm+d=0)$.

7.25.* Zamjenom vrijednosti za x i sređivanjem dobijamo bikvadratnu jednačinu

$$y^4+6\left(\frac{a-b}{2}\right)^2y^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^4-\frac{c}{2}=0.$$

7.26.*a) $x_1=1$, $x_2=1$, $x_{3,4}=1\pm2i\sqrt{6}$ b) $x_1=-5$, $x_2=-3$, $x_{3,4}=-4\pm i\sqrt{7}$

c) $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_{3,4}=-1\pm5i$

7.27.* Primjenom Vieteovih formula za kvadratnu jednačinu i korištenjem datog uvjeta dobivamo jednačinu $(m+1)^4+6(m+1)^2-7=0$ čija su rješenja $m=0$, $m=-2$.

7.28.* a) Uputa: Množenjem jednačine sa najmanjim zajedničkim sadržiocem nazivnika i sređivanjem dobivamo:

$$10x^2+4x=x(x^4-3x^2+10x-6)=0\ \Leftrightarrow\ x(x^4-3x^2-10)=0$$

odakle neposredno zaključujemo da je $x=0$ jedno rješenje jednačine, a preostala rješenja dobivamo rješavanjem bikvadratne jednačine $x^4-3x^2-10=0$.

Rezultat: $0, \pm\sqrt{5}, \pm i\sqrt{2}$. b) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm4$.

7.2. Binomne jednačine (jednadžbe)

7.29.a) Jednačine oblika $ax^n+b=0$ obično se nazivaju binomne jednačine. Postupak rješavanja ovih jednačina svodi se na rastavljanje lijeve strane na faktore, pa se jednačina raspada na više njih sa manjim stepenom.

$x^3-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1=0 \vee x^2+x+1=0) \Leftrightarrow x_1=1,\ x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

b) $x_1=-1,\ x_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

c) $x^3-8=0 \Leftrightarrow x^3-2^3=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4)=0 \Leftrightarrow (x-2=0 \vee x^2+2x+4=0)$

$\Leftrightarrow x_1=2,\ x_{2,3}=-1\pm i\sqrt{3}$. d) $x_1=-3,\ x_{2,3}=\frac{-3\pm3\sqrt{3}}{2}$

7.30.a) $x^3-64=0 \Leftrightarrow x^3-4^3=0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2+4x+16)=0$

$\Leftrightarrow (x-4=0 \vee x^2+4x+16=0) \Leftrightarrow x_1=4, x_{2,3}=-2\pm2i\sqrt{3}$

b) $x_1=-4,\ x_{2,3}=2\pm2i\sqrt{3}$ c) $27x^3-8=0 \Leftrightarrow (3x)^3-2^3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3x-2)(9x^2+6x+4)=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{2}{3},\ x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{3}$ d) $x_1=\frac{1}{3},\ x_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{6}$

7.31.a) $8x^3-125=0 \Leftrightarrow (2x)^3-5^3=0 \Leftrightarrow (2x-5)(4x^2+10x+25)=0$

$\Leftrightarrow 2x-5=0 \vee 4x^2+10x+25=0$

Rezultat: $x_1=\frac{5}{2},\ x_{2,3}=\frac{-5\pm5i\sqrt{3}}{4}$ b) $x_1=\frac{3}{4},\ x_{2,3}=\frac{-3\pm3i\sqrt{3}}{8}$

c) $x_1=-\frac{7}{5},\ x_{2,3}=\frac{7\pm7i\sqrt{3}}{10}$ d) $x_1=\frac{6}{5},\ x_{2,3}=\frac{-3\pm3i\sqrt{3}}{5}$

7.32.a) $x_1=-2a$, $x_{2,3}=a\left(1\pm i\sqrt{3}\right)$ b) $x_1=\frac{a}{3}$, $x_{2,3}=\frac{a}{6}\cdot\left(-1\pm i\sqrt{3}\right)$

c) $x_1=\frac{3a}{4}$, $x_{2,3}=\frac{3a}{8}\left(-1\pm i\sqrt{3}\right)$ d) $x_1=\frac{9a}{2}$, $x_{2,3}=\frac{9a}{4}\left(1\pm i\sqrt{3}\right)$.

7.33.a) $x^6-64=0 \Leftrightarrow (x^2)^3-4^3=(x^2-4)(x^4+4x^2+16)=0$

$\Leftrightarrow x^2-4=0 \vee x^4+4x^2+16=0$

$\Rightarrow x_{1,2}=\pm2,\ x_{3,4}=\pm\sqrt{-2+2i\sqrt{3}},\ x_{5,6}=\pm\sqrt{-2-2i\sqrt{3}}$.

b) $x_{1,2}=\pm\frac{i}{2}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{1+i\sqrt{3}}{8}}$, $x_{5,6}=\pm\sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{8}}$

c) $x_{1,2}=\pm\frac{2}{3}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{3}}$, $x_{5,6}=\pm\sqrt{\frac{2\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{3}}$

d) $x_{1,2}=\pm\frac{3}{4}$, $x_{3,4}=\pm\frac{3}{4}\sqrt{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$, $x_{5,6}=\pm\frac{3}{4}\sqrt{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$

7.34.a) $\sqrt[3]{1}=x \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x^3-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

b) $x_1=2$, $x_{2,3}=-1\pm i\sqrt{3}$ c) $x_1=3$, $x_{2,3}=\frac{-3\pm 3i\sqrt{3}}{2}$

d) $x_1=4$, $x_{2,3}=-2\pm 2i\sqrt{3}$

7.35.a) $x_1=-3$, $x_{2,3}=\frac{3\pm 3i\sqrt{3}}{2}$ b) $x_1=-4$, $x_{2,3}=2\pm 2i\sqrt{3}$

c) $x_1=-6$, $x_{2,3}=3\left(1\pm i\sqrt{3}\right)$ d) $x_1=-5$, $x_{2,3}=\frac{5}{2}\cdot\left(1\pm i\sqrt{3}\right)$

7.3. Neke jednačine trećeg stepena

7.36.a) Rješenje je $x=1$,a ostali brojevi nisu. b) Rješenje je $x=-1$.
7.37.a) Rješenje je $x=1$. b) Rješenje je $x=-1$.
7.38.a) $x=3$ jeste rješenje. b) Rješenje je $x=2$.
7.39.a) Koristeći teoremu: Ako jednačina $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ ima cjelobrojno rješenje, tada je slobodni član a_0 djeljiv sa tim rješenjem, zaključujemo da data jednačina može imati samo dva cjelobrojna rješenja i to ±1. Neposrednom provjerom utvrđujemo da ni jedan od ovih brojeva nije rješenje jednačine. Znači jednačina $x^3+5x^2+2x+1=0$ nema cjelobrojnih rješenja.
b) Treba provjeriti da li je neki od brojeva ±1, ±5 rješenje date jednačine. Neposrednim uvrštavanjem ovih brojeva u jednačinu uvjeravamo se da ni jedan od njih nije njeno rješenje.
c) U ovom zadatku treba provjeriti da li je neki od brojeva ±1, ±2, ±4 rješenje jednačine.

Nakon toga se uvjeravamo da ni jedan od cijelih brojeva nije rješenje jednačine.
7.40.a) Neposrednom provjerom zaključujemo da ni jedan od brojeva ±1 nije rješenje jednačine, pa ona nema cjelobrojnih rješenja.
b) Ni jedan od brojeva ±1, ±2 nije rješenje jednačine.
c) Ni jedan od brojeva ±1, ±3 nije rješenje jednačine.
7.41. Koristeći Bezoutvu[1] teoremu: Ako je α nula polinoma $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$, tada je polinom $f(x)$ djeljiv binomom $x-\alpha$, jednačina trećeg stepena se može zamijeniti sa dvije jednačine od kojih je jedna linearna, a druga

[1] Étiene Bezout (1730-1783), je poznati francuski matematičar

kvadratna. Rješenje linearne jednačine je upravo dati broj, a preostala dva rješenja kubne jednačine dobiju se rješavanjem kvadratne jednačine.
a) $(x^3-3x+2=0):(x-1)=x^2+x-2 \Rightarrow x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2) \Rightarrow x^3-3x+2=0$
$\Leftrightarrow (x-1=0)\vee(x^2+x-2=0) \Rightarrow x_2=1,\ x_3=-2$.
b) $(x^3+5x+18):(x+2)=x^2-2x+9$; $x^2-2x+9=0 \Rightarrow x_{2,3}=1\pm2i\sqrt{2}$.
c) $(x^3+2x^2-3x-10):(x-2)=x^2+4x+5$; $x^2+4x+5=0 \Rightarrow x_{2,3}=-2\pm i$.

7.42.a) $x_{2,3}=\frac{-5\pm i\sqrt{55}}{5}$ b) $x_{2,3}=-1\pm\sqrt{7}$ c) $x_{2,3}=\frac{11\pm 2i\sqrt{154}}{2}$

7.43.a) Drugo rješenje jednačine je $x_2=-1-2i$. Polinom x^3-x^2-x-15 je djeljiv sa
$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2+2x+5$.
$(x^3-x^2-x-15=0)$: $(x^2+2x+5)=x-3$; $x_3=3$.
b) $x_2=2+i$, $x_3=2$ c) $x_2=2-3i$, $x_3=5$.

7.44. Uvrštavanjem datog rješenja u jednačinu dobivamo jednačinu po nepoznatoj m. Rješenjem te jednačine određujemo m. Uvrštavanjem dobivene vrijednosti za m u datu jednačinu, koristeći dato rješenje, određujemo preostala dva rješenja (kao u prethodnom zadatku).
a) $-m+2+1-2=0 \Leftrightarrow -m=-1 \Leftrightarrow m=1$.
$x^3+2x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x^2+x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x_2=-2,\ x_3=1$.
b) $-250+25m-65+15=0 \Leftrightarrow 25m=300 \Leftrightarrow m=12$.
$2x^3+12x^2+13x+15=0 \Leftrightarrow (2x^2+2x+3)(x+5)=0 \Rightarrow x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{5}}{2}$
c) $m=1$, $x_2=-i$, $x_3=i$ d) $m=-21$, $x_2=-3$, $x_3=1$

7.45.a) $x^3-7x^2-9x+63=0 \Leftrightarrow (x^3-7x^2)-9(x-7)=0 \Leftrightarrow x^2(x-7)-9(x-7)=0$
$\Leftrightarrow (x-7)(x^2-9)=0 \Leftrightarrow (x-7)(x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow x_1=-3,\ x_2=3,\ x_3=7$.
b) $6x^3+2x^2-25x-50=0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5)(x+2)=0 \Leftrightarrow x_1=-5,\ x_2=-2,\ x_3=5$.
c) $x^3+2x^2-13x+10=0 \Leftrightarrow (x^3+4x^2-5x)-(2x^2+8x-10)=0$
$\Leftrightarrow x(x^2+4x-5)-2(x^2+4x-5)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+4x-5)=0$
$\Leftrightarrow x_1=-5,\ x_2=1,\ x_3=2$.
d) $x^3-x^2-17x-15=0 \Leftrightarrow (x^3+4x^2+3x)-(5x^2+20x+15)=0 \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1=-3,\ x_2=-1,\ x_3=5$.

7.46.a) Jedno rješenje jednačine je $x_1=1$ (nalazimo ga među faktorima broja 4)
$x_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{2}$. b) $x_1=2$, $x_{2,3}=\frac{-5\pm i\sqrt{23}}{4}$ c) $x_1=-1$, $x_{2,3}=-1\pm i\sqrt{2}$.
d) $x_1=-2$, $x_{2,3}=\frac{3\pm i\sqrt{23}}{2}$ e) $x_1=-2$, $x_{2,3}=2\pm i$ f) $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{39}}{10}$

7.47.a) Jednačinu ćemo riješiti određivanjem, prvo, jednog njenog rješenja, a zatim ćemo pronaći kvadratnu jednačinu čija su rješenja preostala dva rješenja date kubne jednačine.
Cjelobrojna rješenja tražimo među djeliteljima slobodnog člana: ±1, ±3.
Neposrednom provjerom uvjeravamo se da je $x=-1$ rješenje jednačine $3x^3+2x^2+2x+3=0$.

Polinom $3x^3+2x^2+2x+3$ je djeljiv sa binomom $x+1$. Odredimo ovaj količnik:

$(3x^3+2x^2+2x+3):(x+1)=3x^2-x+3$
$3x^3+3x^2$
$-x^2+2x+3$
$-x^2-x$
$3x+3$
$3x+3$

$3x^3+2x^2+2x+3=(x+1)(3x^2-x+3)$

$3x^3+2x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(3x^2-x+3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1=0 \vee 3x^2-x+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1=-1,\ x_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{35}}{6}$.

b) $x_1=-1,\ x_2=3,\ x_3=\frac{1}{3}$ c) $x_1=3,\ x_{2,3}=\frac{-1\pm 3i}{2}$ d) $x_1=-1,\ x_2=3+2\sqrt{2},\ x_3=3-2\sqrt{2}$

e) $x_1=-1,\ x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{15}}{4}$ f) $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=4$

7.48. Uputa: Zamjenom datih rješenja u jednačinu dobije se sistem od dvije jednačine sa nepoznatim a i b: $4a-b=0,\ 9a-b=24$.

Rješavanjem ovog sistema određujemo $a=\frac{18}{5}$ i $b=\frac{42}{5}$.

Uvrštavanjem vrijednosti za a i b u početnu jednačinu dobije se jednačina

$5x^3-18x^2-5x+42=0$ čije treće rješenje je $x_3=-\frac{7}{5}$.

7.4. Simetrične jednačine (jednadžbe)

7.49.a) $m=1$ b) $m=6$ c) $m=-21$ d) $m=-3$ e) $m=-1$ f) $m=-1$

7.50.a) $x^3-x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x^3+1-x^2-x=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)-x(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-2x+1) \Leftrightarrow x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=1$.

b) $x^3+x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x^3+1+x^2+x=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)+x(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) \Leftrightarrow x_1=-1,\ x_2=i,\ x_3=-i$.

c) $x^3-4x^2-4x+1=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

d) $x^3+7x^2+7x+1=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_{2,3}=-3\pm 2\sqrt{2}$.

e) $x^3+2x^2+2x+1=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

f) $-x^3+3x^2+3x-1=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_{2,3}=2\pm\sqrt{3}$.

7.51.a) $x_1=-1,\ x_{2,3}=-10\pm 3\sqrt{11}$ b) $x_1=1,\ x_{2,3}=\frac{13\pm\sqrt{145}}{12}$

c) $x_1=-1,\ x_{2,3}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$

7.52.a) $3x^5-7x^4-4x^3-4x^2-7x+3=0 \Leftrightarrow 3(x^5+1)-7x(x^3+1)-4x^2(x+1)=0$.

$\Leftrightarrow 3(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)-7x(x+1)(x^2-x+1)-4x^2(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(3x^4-3x^3+3x^2-3x+3-7x^3+7x^2-7x-4x^2)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(3x^4-10x^3+6x^2-10x+3)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \vee 3x^4-10x^3+6x^2-10x+3=0$

$\Rightarrow x_1=-1$.

$$3x^4-10x^3+6x^2-10x+3=0 \Leftrightarrow \frac{3x^4-10x^3+6x^2-10x+3}{x^2}=0 \Leftrightarrow 3x^2-10x+6-\frac{10}{x}+\frac{3}{x^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0 \Leftrightarrow 3\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0.$$

Uvođenjem smjene $x+\frac{1}{x}=t$, dobijena jednačina postaje kvadratna po t:

$3(t^2-2)-10t+6=0 \Leftrightarrow 3t^2-10t=0 \Leftrightarrow t=0 \vee 3t=10$.

Rješavanjem dviju kvadratnih jednačina po x dobijemo četiri rješenja:

$x+\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x^2+1=0,\ (x\neq 0) \Leftrightarrow x_{2,3}=\pm i$.

$x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2+3=10x,\ (x\neq 0) \Leftrightarrow 3x^2-10x+3=0 \Rightarrow x_4=\frac{1}{3},\ x_5=3$

b) $x_1=-1$

7.53.a) $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=2,\ x_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ b) $x_{1,2}=1,\ x_3=-3,\ x_4=-\frac{1}{3}$

c) $x_{1,2}=\pm i,\ x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$.

7.54.a) Uputa: $x^4+4x^3-4x-1=0 \Leftrightarrow (x^4-1)+4x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+4x+1)=0$.

Rezultat: $x_{1,2}=\pm 1,\ x_{3,4}=-2\pm\sqrt{3}$.

b) $\frac{3x+2}{2x+3}=x^2 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+5x+2)=0$

$\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=-\frac{1}{2}$.

c) $x^3-3x^2-x+3=0 \Leftrightarrow x^2(x-3)-(x-3)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-1)=0$

$\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=3$.

7.55.a) $x^3+x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+8)-x(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+3x+4)=0 \Rightarrow x_1=2,\ x_{2,3}=\frac{-3\pm i\sqrt{7}}{2}$.

b) $x^3-2x^2-(a^2-a-1)x+a^2-a=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2+x-a^2x+a^2+ax-a=0$

$\Leftrightarrow x(x-1)^2-a^2(x-1)+a(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-a^2+a)=0$

$\Rightarrow x_1=1,\ x_2=1-a,\ x_3=a$.

7.56.* a) Uputa: Dijeljenjem sa x^3 i sređivanjem dobije se:

$$4\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-13\left(x+\frac{1}{x}\right)+34=0.$$

Smjenom $x+\frac{1}{x}=t$, dalje se dobije, $(t-2)(4t^2-25)=0$.

Rezultat: $x_{1,2}=1, x_3=2$, $x_4=\frac{1}{2}$, $x_5=-2$, $x_6=-\frac{1}{2}$.

b) $x_{1,2}=1$, $x_{3,4}=1\pm i\sqrt{3}$, $x_{5,6}=\frac{1}{2}\cdot\left(3\pm\sqrt{5}\right)$

7.57.a) $x_{1,2}=\pm i$, $x_{3,4}=1\pm i$, $x_{5,6}=\frac{1}{2}\cdot(1\pm i)$

b) $x_{1,2}=1i$, $x_{3,4}=-1$, $x_{5,6}=i\cdot\left(1\pm\sqrt{2}\right)$, $x_{7,8}=-i\cdot\left(1\pm\sqrt{2}\right)$

8. SISTEMI (SUSTAVI) KVADRATNIH JEDNAČINA (JEDNADŽBI)

8.1.a) Da b) Da c) Ne **8.2.** a) Da b) Da c) Ne

8.3. Sistem od dvije jednačine od kojih je jedna linearna, a druga kvadratna rješavamo metodom zamjene (supstitucije) tako što se iz linearne jednačine izrazi jedna promjenljiva pomoću druge i uvrsti u kvadratnu jednačinu.

a) $\left.\begin{aligned}x-y&=1\\ xy-12&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}y&=x-1\\ x(x-1)-12&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x-y&=1\\ x^2-x-12&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x_1&=-3, y_1=-4\\ x_2&=4,\ y_2=3\end{aligned}\right\}$

Rezultat: (-3, -4), (4, 3). b) (2, 1) c) $(2,5),\left(\frac{1}{11},\frac{47}{11}\right)$

8.4.a) (6, 2), (-4, -3) b) (0, 1), (1, 0) c) $(1,1),\left(\frac{82}{25},-\frac{13}{25}\right)$

8.5.a) $\left.\begin{aligned}2y-x&=2\\ 2xy&=3\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x&=2y-2\\ 2xy&=3\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x&=2y-2\\ 2(2y-2)y&=3\end{aligned}\right\}$

$\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x&=2y-2\\ 4y^2-4y-3&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x_1&=1,\ x_2=-3\\ y_1&=\frac{3}{2},\ y_2=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}.$

b) $\left(\frac{2}{5},-1\right),\left(\frac{3}{5},-\frac{2}{3}\right)$ c) $\left(-4,\frac{2}{5}\right),\left(2,-\frac{4}{5}\right)$

8.6.a) (5, 3) b) (4, 1), (1, 4) c) $(-1,1),\left(\frac{211}{173},-\frac{147}{173}\right)$

8.7.a) (4, 2), (2, 4) b) $(4,5),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ c) (3, 2), (2, 3)

8.8.a) (-2a, a); (a, -2a) b) (a-b, a+b), (-a-b, b-a) c) (-a, -2a), (2a, a)

8.9.a) $\left(-\frac{3}{2}a,-\frac{1}{2}a\right),\left(-a,\frac{3}{2}a\right)$ b) (a+1, a-1), (a-1, a+1)

c) $\left(-\frac{14}{5}a,\frac{11}{5}a\right),(2a,-a)$

8.10.a) (-15, 5), (3, 4) b) $(3,1),\left(\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right)$

8.11.a) (5, 2), (-2, 5) b) (2, 2), (-2, -2) c) (4, 3), (3, 4), (-4, -3), (-3, -4)

****

8.12.a) $\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=8\\ xy&=4\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x^2+2xy+y^2&=2xy+8\\ xy&=4\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}(x+y)^2&=8+8\\ xy&=4\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}(x+y)^2&=16\\ xy&=4\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x+y&=\pm4\\ xy&=4\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x_1&=2,\ y_1=2\\ x_2&=-2,\ y_2=-2\end{aligned}\right\}$

b) $\begin{aligned}x^2+y^2&=13\\ xy&=6\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}x^2+2xy+y^2&=2xy+13\\ xy&=6\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}(x+y)^2&=25\\ xy&=6\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}x+y&=\pm5\\ xy&=6\end{aligned}$

Rezultat: (2, 3), (3, 2), (-2, -3), (-3, -2).

c) $\left(3+\sqrt{10},-3+\sqrt{10}\right),\left(-3+\sqrt{10},3+\sqrt{10}\right),\left(3-\sqrt{10},-3-\sqrt{10}\right),\left(-3-\sqrt{10},3-\sqrt{10}\right)$

8.13.a) Dati sistem možemo uprostiti uvođenjem smjena $x+y=u$, $xy=v$:

$\begin{aligned}u+v&=11\\ u-v&=1\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}2u&=12\\ 2v&=10\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}u&=6\\ v&=5\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}x+y&=6\\ xy&=5\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}x_1&=5, x_2=1\\ y_1&=1, y_2=5.\end{aligned}$

b) (5, 1), (1, 5), (3, 2), (2, 3) c) (-1, -2), $(1\pm\sqrt{2}, -(11\pm\sqrt{2}))$

8.14.a) $\begin{aligned}5xy+3x^2&=57\\ 15xy-x^2&=81\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}5xy+3x^2+3(15xy-x^2)&=57+3\cdot81\\ 15xy-x^2&=81\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}xy&=6\\ 15xy-x^2&=81\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}xy&=6\\ 90-x^2&=81\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}xy&=6\\ x^2&=9\end{aligned}$

Rezultat: (3, 2), (-3, -2) . b) (-2, -4), $\left(\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right)$ c) (0, 0)

8.15.a) $(\pm3,\pm2)$, $\left(\pm5\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ b) $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$, (1, -2), (-1, 2)

c) (2, 1), (-2, -1), $\left(\pm\frac{4}{\sqrt{7}},\pm\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$

8.16.a) $\begin{aligned}2x^2-3xy+3y^2&=80\\ x^2+xy-2y^2&=-56\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}7(2x^2-3xy+3y^2)+10(x^2+xy-2y^2)&=560-560\\ x^2+xy-2y^2&=-56\end{aligned}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{aligned}24x^2-11xy+y^2&=0\\ x^2+xy-2y^2&=-56\end{aligned}.$

Par (0, 0) nije rješenje sistema, pa prvu jednačinu možemo podijeliti sa y^2.

$$24\left(\frac{x}{y}\right)^2-11\left(\frac{x}{y}\right)+1=0\ \Rightarrow\ \frac{x}{y}=t,\ 24t^2-11t+1=0\ \Rightarrow\ t=\frac{1}{3},\ t=\frac{1}{8}\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ y=3x,\quad y=8x$

$$\begin{cases} y=3x \\ x^2+xy-2y^2=-56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ x^2+3x^2-18x^2=-56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=2, y=6 \\ x=-2, y=-6 \end{matrix}.$$

Rezultati: a) $(2, 6), (-2, -6), \left(\pm 2\sqrt{\frac{2}{17}}, \pm 16\sqrt{\frac{2}{17}}\right)$ b) $(4, 2), (-4, -2)$

c) $(2, 2), (-2, -2), (1, -1), (-1, 1)$

8.17.*a) $\begin{cases} x^2+4xy-2y^2=5(x+y) \\ 5x^2-xy-y^2=7(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x^2+4xy-2y^2)=35(x+y) \\ 5(5x^2-xy-y^2)=35(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 7(x^2+4xy-2y^2)=5(5x^2-xy-y^2) \\ 5x^2-xy-y^2=7(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2+28xy-14y^2=25x^2-5xy-5y^2 \\ 5x^2-xy-y^2=7(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 18x^2-33xy+9y^2=0 \\ 5x^2-xy-y^2=7(x+y) \end{matrix}\right\} \overset{\frac{x}{y}=t}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} 18t^2-33t+9=0 \\ 5x^2-xy-y^2=7(x+y) \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} t_1=\frac{1}{3},\ t_2=\frac{3}{2} \\ 5x^2-xy-y^2=7(x+y) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=3x,\ 3y=2x \\ 5x^2-xy-y^2=7(x+y) \end{matrix}\right\}, \ldots$$

Rezultat: a) $(0, 0), (3, 2), (-4, -12)$

b) $\begin{cases} x^3-3xy^2=1 \\ 3x^2y-y^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3xy^2=3x^2y-y^3 \\ 3x^2y-y^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3-3xy^2-3x^2y=0 \\ 3x^2y-y^3=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)-3xy(x+y)=0 \\ 3x^2y-y^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2-4xy+y^2)=0 \\ 3x^2y-y^3=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-x \\ y(3x^2-y^2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 2x^3=-1 \end{cases}$$

Rezultat: $-\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$ c) $(3, 2), (2, 3)$

8.18.a) $(2, 3), \left(-\frac{3}{4}, -4\right)$ b) $\left(\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}, \frac{3\mp\sqrt{6}}{3}\right)$ c) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$

8.19.* a) $(2, 3), (3, 2)$ b) Uputa: Množenjem druge jednačine sa 3 i dodavanjem prvoj dobivamo: $(x+y)^3=1 \Rightarrow x+y=1$; Rezultat: $(2, -1), (-1, 2)$ c) $(2, 1)$

8.20.* Uputa: Uvesti smjenu $(x+y)/x-y)=t$. Rezultat: $(3, 2), (-3, -2)$. **8.21.*** $(4, 4)$

8.22.*a) $\left(\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), (-1, 2, 3)$ b) $(1, 2, 0), (-1, -2, 0)$ c) $(4, 6, 3), (4, 3, 6)$

8.23.*a) $x=\frac{1}{a-b+c},\ y=\frac{1}{a+b-c},\ z=\frac{1}{b+c-a}$ b) $\left(\pm\frac{5}{2}, \pm 6, \pm 4\right)$

c) $(0,0,0), \left(\frac{2}{a-b+c}, \frac{2}{a+b-c}, \frac{2}{-a+b+c}\right)$

8.24.a) $x+yi,\ x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ b) $2-i, -2+i$ c) $3+i, -3-i$.

8.25.a) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)$ b) $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$ c) $\pm\sqrt{6}$

9. IRACIONALNE JEDNAČINE (JEDNADŽBE)

9.1. Iracionalna jednačina u kojoj se varijabla pojavljuje u radikandu kvadratnog korijena definirana je samo za one vrijednosti varijable za koje je radikand (potkorjena veličina) **nenegativna**.

a) $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ b) $x\geq 0$ c) $x+12\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -12$

9.2.a) Jednadžba je definirana za svaku realnu vrijednost od x.

b) Jednadžba nije definirana ni za jednu realnu vrijednost varijable x.

c) Jednadžba je definirana samo za x=5.

9.3.a) Jednačina nije definirana ni za jednu realnu vrijednost varijable x, pa nema rješenja. b) Kao pod a)

9.4.a) $x=16$ b) $x=64$ c) $x=0$ d) $x=-1$

9.5.a) $x=24$ b) $x=6$ c) $x=2$ d) $x=-1$

9.6.a) $x=2$ b) $x=0,\ x=-1$ c) Jednačina nema rješenja.

9.7.a) $x=3$ b) $x=\pm 3$ c) Nema rješenja.

Napomena: Rješavanjem iracionalnih jednačina vodimo računa o domeni jednačine. Domena se može odrediti na početku, prije rješavanja zadatka. Međutim, veoma često se iracionalne jednačine rješavaju tako da se odrede brojevi koji bi mogli biti rješenje ("kandidati" za rješenje), a zatim neposrednom provjerom utvrdi koji od tih brojeva je zaista i rješenje posmatrane jednačine.

9.8.a) Kvadriranjem jednačine i sređivanjem izraza dobije se:

$$\sqrt{2x+1}=1-x \Rightarrow \left(\sqrt{2x+1}\right)^2=(1-x)^2 \Rightarrow 2x+1=1-2x+x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x=0,\ x=4.$$

Brojevi 0 i 4 mogli bi biti rješenje date iracionalne jednačine. Uvrstimo x=0 u polaznu jednačinu. Dobije se istinita jednakost. Vidimo da je jednačina zadovoljena. Znači x=0 je jedno rješenje jednačine.

Uvrstimo, sada, u jednačinu x=4. Vidimo da je $\sqrt{9}=-3$. Kako, u ovom poglavlju operišemo samo sa aritmetičkim korijenima, to x=4 nije rješenje date jednačine. Rezultat: x=0.

b) $\sqrt{1+3x}=x+1 \Rightarrow 1+3x=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=1.$

Neposrednim uvrštavanjem broja x=0, a zatim i x=1 uvjeravamo se da su rješenja date iracionalne jednačine. Rezultat: $x_1=0,\ x_2=1$.

c) $\sqrt{12-x}=x$ => $12-x=x^2$ => $x^2+x-12=0$ => $x=3, x=-4$.
Rezultat: x=3 (Drugi od dobijenih brojeva, x=-4, ne zadovoljava datu jednačinu).

9.9.a) x=5 b) x=2 (Broj x = -2, nije rješenje date jednačine jer ne pripada njenoj domeni). c) x=-3.

9.10.a) x=4 b) x=2, x=5 c) Nema rješenja.

9.11.a) x=7, $x=\frac{2}{3}$ b) x= -4, x=3 c) x=1

9.12 a) Uputa: Prije kvadriranja jednačinu transformirati tako da se na jednoj njenoj strani nalazi samo korijen. Rezultat: x=3 b) x = 5 c) x = -1

9.13.a) Uputa: Poslije prvog kvadriranja, jednačinu srediti i ponovo kvadrirati. Rezultat: x=3 b) x=7 c) x=10

9.14.a) x = -1 b) $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ c) x=-4, x=4

9.15.a) Uputa: Prije kvadriranja jednačinu dovesti na oblik u kome će na jednoj strani biti samo korijen. Rezultat: x=3 b) x=3 c) x=1

9.16.a) Nema rješenja. b) x=4

9.17.a) x=2. (Broj, x=14, koji se dobije rješavanjem jednačine, ne pripada njenoj domeni). b) x=3 **9.18**.a) x=6, x=13 b) x=4, x=196 c) x=6

9.19.a) Uputa: Jednačinu stepenovati sa 3. $x=-\frac{1}{3}$, x=3 b) x=3, x=5 c) x=-1, x=1

9.20.a) $x+1=\frac{9-x}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow x+1=\frac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}{3+\sqrt{x}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1=3-\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}=2-x$. Rezultat: x=1 b) x=9 c) x=3

9.21.a) x=0 b) x=-2 c) x=0 **9.22**.a) $x_{1,2}=1\pm\sqrt{6}$ b) x=-1, $x=-\frac{34}{49}$

9.23.a) x=0, x=5 b) x=7 **9.24**.a) x=-7 b) x=6, x=-37

9.25. a) x=-3, x=3 b) x=11 **9.26**.a) x=-1 b) x=5

9.27. a) x=4 b) x=2 **9.28**.a) x=2 b) x=-8

9.29.a) Rastavnjanjem na faktore potkorjenih veličina, dobije se:

$$\sqrt{(x+1)(4x+5)}-\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)}=\sqrt{(x-1)(x+1)}$$

$$\sqrt{x+1}\left[\sqrt{4x+5}-\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{x-1}\right]=0 \implies x_1=-1,\ \sqrt{4x+5}=\sqrt{x-1}+\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$4x+5=x-1+2\sqrt{2x^2-3x+1}+2x-1 \Leftrightarrow x+7=2\sqrt{2x^2-3x+1} \Rightarrow x^2+14x+49=8x^2-12x+4$$

$$7x^2-26x-45=0 \implies x_2=5,\quad x_3=-\frac{9}{7}.$$

b) $x_1=-2$, $x_2=1$; $x_3=13$. **9.30**.a) x = 2 b) x=4

9.31.a) Uputa: Uvođenjem smjene $\frac{x}{1+x}=t^2$, $t\neq 1$, datu jednačinu transformiramo u kvadratnu jednačinu $t^2-3t+2=0$. Rezultat: $x=-\frac{4}{3}$.

b) Uputa: Uzeti $t=\frac{x+2}{x-1}$, $t>0$. Rezultat: x = 4.

9.32.a) x=3 b) x=-3 **9.33**.a) x=10 b) x=4 **9.34**.a) $x=\frac{25}{26}$ b) $x_1=-21$, $x_2=21$.

9.35.a) x=0, za a=0; $x=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$, za a>0. b) Za a=0, $x_1=0$, $x_2=1$; za a>0, $x=\frac{2a+1+\sqrt{1+4a}}{2}$ **9.36**.a) x=8 b) x=0,64

9.37.a) $x=\sqrt{mn}$, za $0\leq 4m\leq n$ b) Uputa: Jednačinu dovesti na oblik $b(x+a)\sqrt{a+x}=a\sqrt{x^3}$ a zatim kvadrirati. Rezultat: $x=\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2-\sqrt[3]{b^2}}}$

9.38.a) x=-1 b) x=2401 **9.39**. Rezultat: $a\in[-1, 0)\cup[1, +\infty)$.

10. IRACIONALNE NEJEDNAČINE (NEJEDNADŽBE)

10.1.a) $x\in[11, +\infty)$ b) $x\in(-\infty, 1]$ c) $x\in[6, +\infty)$

10.2.a) $x\geq 3$ b) $x\leq 2$ c) $x\in R$

10.3.a) $x\geq 3$ b) $x\geq 5$ c) $-6\leq x\leq 1$ **10.4**.a) $0\leq x\leq 7$ b) $x\geq 5$

10.5.a) x>9 b) x>3 c) x>6 **10.6**.a) $4\leq x<8$ b) x>4 c) $-\frac{5}{2}\leq x<2$

10.7.a) x<4 b) x<70 **10.8**.a) $x\in[-1, 7]$ b) $x\in[-2, 2)$

10.9.a) $x\in[-14, 2)$ b) $x\in(-\infty,-2]\cup(14, +\infty)$

10.10.a) $x\in[1, 4)$ b) $(1, +\infty)$

10.11.a) Data nejednačina je ekvivalentna uniji sistema nejednačina:

$8-2x\geq 0$, $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$ ili $8-2x<0$, $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$

$x\leq 4$
$-x^2+6x-5\geq 0$
$-x^2+6x-5\geq(8-2x)^2$

$x\leq 4$
$-x^2+6x-5\geq(8-2x)^2$

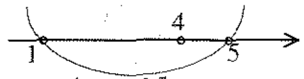
$x>4$
$-x^2+6x-5\geq 0$

$x>4$
$x^2-6x+5\leq 0$

x ≤ 4
$5x^2-38x+69<0$

$3 < x \leq 4$

x > 4
$(x-1)(x-5) \leq 0$



$4 < x \leq 5$

Rješenje posmatrane nejednačine je unija dobivenih rješenja sistema na koje se jednačina raspala: $3<x \leq 5$ b) $x<-10,\ x>1$.

10.12 a) Data nejednačina je ekvivalentna uniji sistema nejednačina:

$4x - 6 \geq 0$
$4x-6>\sqrt{6x-2x^2}$
$2 < x \leq 3$

$4x - 6 < 0$
$4x-6>\sqrt{6x-2x^2}$
$x \in \varnothing$.

Rezultat: **$2 < x \leq 3$**   b) $\frac{2}{3} < x < +\infty$

10.13.a) $x > 34+\sqrt{1188}$ b) $-\frac{1}{2} \leq x < 28-\sqrt{756}$

10.14.a) $(-\infty,-6)\cup(-5,\ 0)$ b) $\left[1,\ \frac{46}{19}\right)$ c) $(-1,\ 15)$

10.15.a) $\left[-1-\sqrt{28},\ 1-\sqrt{10}\right)\cup\left(3,\ -1+\sqrt{28}\right]$ b) $\left[-\frac{1}{2},\ 0\right)\cup\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$

10.16.a) $(-\infty,0)\cup[1,\ 2]$ b) $\left[-\frac{2}{3},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{5}{2}\right]$

10.17.a) $[-2,\ +\infty)$ b) $x > 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

10.18.a) $(-\infty,-2)\cup\left[-1,\frac{\sqrt{31}-1}{6}\right)$ b) $0 < x < 3$

10.19.a) $\left[\frac{5}{2},\ 3\right)$ b) $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ **10.20**.a) $(-1,\ 0)$ b) $(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$

10.21.a) $[-4,-1]$ b) $[-5,\ 20)$

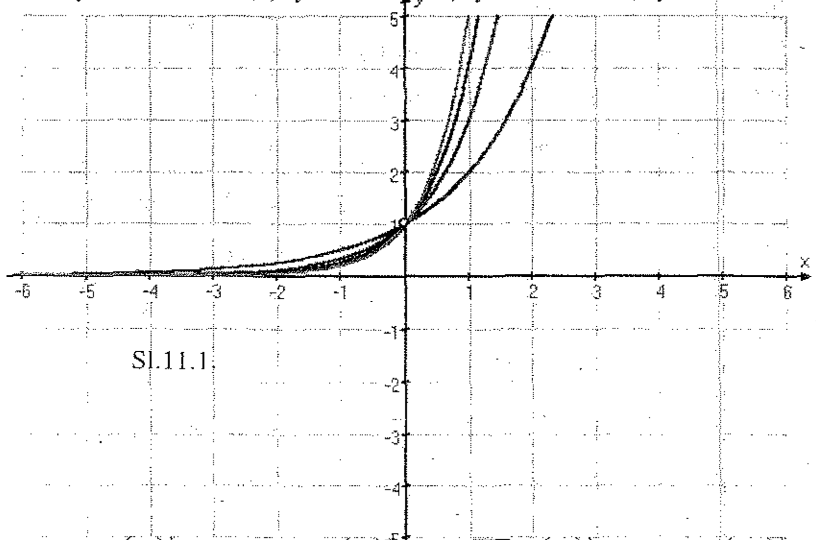
10.22.a) $(-\infty,\ 0]$ b) $(1,\ 2)$

10.23.a) $(-\infty,\ 3]\cup[1,\ +\infty)$ b) $x>1$

11. EKSPONENCIJALNE JEDNAČINE (JEDNADŽBE) I NEJEDNAČINE (NEJEDNADŽBE)

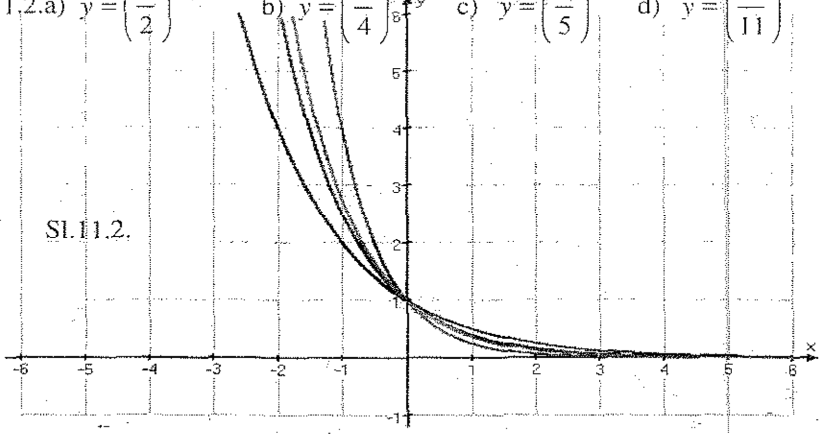
11.1. Eksponencijalna funkcija

11.1.a) $y=2^x$ b) $y=3^x$ c) $y=4^x$ d) $y=5^x$



Sl.11.1.

11.2.a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ c) $y=\left(\frac{2}{5}\right)^x$ d) $y=\left(\frac{4}{11}\right)^x$



Sl.11.2.

11.3. Svaka funkcija iz zadatka 11.1. je rastuća. Funkcije iz prethodnog zadatka su opadajuće. Može se, dalje, zaključiti da je eksponencijalna funkcija $y=a^x$, $a>0$, rastuća ako je $a>1$, a opadajuća u slučaju kada je $0<a<1$.

11.2. Eksponencijalna jednačina (jednadžba) oblika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

11.4.a) $x = -1$ jeste rješenje jednačine $3^{x+1}=1$, jer je $3^{-1+1} = 3^0 = 1$.
b) Da c) Da **11.5.**a) Da b) Da c) Ne

11.6.a) $2^x=16 \Leftrightarrow 2^x=2^4 \Leftrightarrow x=4$. b) $4^x=16 \Leftrightarrow 4^x=4^2 \Leftrightarrow x=2$. c) $x=2$ d) $x=2$

11.7.a) $7^{2x}=49 \Leftrightarrow 7^{2x}=7^2 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$

b) $6^{x+1}=36 \Leftrightarrow 6^{x+1}=6^2 \Leftrightarrow x+1=2 \Leftrightarrow x=1$.

c) $8^{2x-1}=64 \Leftrightarrow 8^{2x-1}=8^2 \Leftrightarrow 2x-1=2 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

d) $3^{x-5}=27 \Leftrightarrow 3^{x-5}=3^3 \Leftrightarrow x-5=3 \Leftrightarrow x=8$.

11.8.a) $2\cdot4^{2x}=64 \Leftrightarrow 4^{2x}=32 \Leftrightarrow (2^2)^{2x}=2^5 \Leftrightarrow 2^{4x}=2^5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$

b) $6^{3x}=36 \Leftrightarrow x=2/3$ c) $8^{x+1}=8 \Leftrightarrow x=-1$

d) $5\cdot9^{x-5}=135 \Leftrightarrow 9^{x-5}=27 \Leftrightarrow 3^{2(x-5)}=3^3 \Leftrightarrow 2(x-5)=3 \Leftrightarrow x=\frac{13}{2}$

11.9.a) $x=1$ b) $2^{3x-1}=2^5 \Leftrightarrow 3x-1=5 \Leftrightarrow x=2$ c) $x=-\frac{1}{2}$ d) $x=-\frac{3}{2}$

11.10.a) $0{,}2^x=5 \Leftrightarrow 5^{-x}=5 \Leftrightarrow x=-1$

b) $0{,}5^{2x}=4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=2^2 \Leftrightarrow 2^{-2x}=2^2 \Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1$.

c) $0{,}25^{x-1}=16 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}=16 \Leftrightarrow 4^{-x+1}=4^2 \Leftrightarrow -x+1=2 \Leftrightarrow x=-1$.

d) $x=-3$

11.11.a) $x=-\frac{1}{2}$ b) $\left(\frac{2}{7}\right)^x=\left(\frac{7}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^x=\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} \Leftrightarrow x=-3$. c) $x=-1$

11.12.a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-1}=\left(\frac{5}{4}\right)^{x+7} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{2x-1}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-(x+7)} \Leftrightarrow 2x-1=-x-7 \Leftrightarrow x=-2$.

b) $x=2$ c) $x=1$

11.13.a) $\sqrt[3]{128}=4^{2x} \Leftrightarrow 128^{\frac{1}{3}}=4^{2x} \Leftrightarrow 2^{\frac{7}{3}}=2^{4x} \Leftrightarrow 4x=\frac{7}{3} \Leftrightarrow x=\frac{7}{12}$.

b) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-2x}=\sqrt{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow 8^{4x}=8^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 4x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{8}$.

c) $4^{\sqrt[x]{2}}=256 \Leftrightarrow 4^{\sqrt[x]{2}}=4^4 \Leftrightarrow \sqrt[x]{2}=4 \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}}=2^2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

11.14.a) $x=-4$ b) $x=4$

c) $4^{\frac{1}{2}\left[x(x-1)-\frac{1}{2}\right]}=2^{\frac{1}{4}} <=> \frac{1}{2}\left[x(x-1)-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4} <=> x^2-x-1=0 <=> x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

11.15.a) $\ldots\Leftrightarrow \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{x}}=\left(\frac{2}{3}\right)^4 \Leftrightarrow 1+\frac{5}{x}=4 \Leftrightarrow \frac{5}{x}=3 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$.

b) $\ldots\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{4}{x}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{4}{x}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow x-1-\frac{4}{x}=2 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=4$

c) $\ldots\Leftrightarrow 8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(5-\frac{x}{2}\right)}=2^{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow 2^{3-\left(5-\frac{x}{2}\right)}=2^{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=\frac{x}{2}-2$

$=> x=2, x=10$.

11.16.a) $x^2-4x+6=3 => x^2-4x+3=0 => x=1, x=3$

b) $x^2-7{,}7x+17{,}5=4{,}5 => 10x^2-77x+13=0 => x=\frac{5}{2}, x=\frac{26}{5}$.

c) $(x^2+x-2)(3-x)=0 => x^2+x-2=0$ ili $x=3 => x=-2, x=1, x=3$.

11.17.a) $3^x\cdot\sqrt[3]{8^x}=36 \Leftrightarrow 3^x\cdot8^{\frac{x}{3}}=36 \Leftrightarrow 3^x2^x=36 \Leftrightarrow (2\cdot3)^x=6^2 \Leftrightarrow x=2$.

b) $2^x\cdot5^x=0{,}1\cdot\left(10^{x-2}\right)^4 \Leftrightarrow 10^x=\frac{1}{10}\cdot10^{4x-8} \Leftrightarrow 10^x=10^{4x-9}$

$\Leftrightarrow x=4x-9 \Leftrightarrow x=3$. c) $x=12$

11.18.a) $2^{1-x^2}2^{2x}=64^{-1} \Leftrightarrow 2^{1-x^2+2x}=2^{-6} \Leftrightarrow 1-x^2+2x=-6$

$\Leftrightarrow x^2-2x-7=0 => x_{1,2}=1\pm2\sqrt{2}$.

b) $3\cdot2^x=4\cdot\sqrt[\frac{x}{2}]{3} \Leftrightarrow 3\cdot2^x=4\cdot3^{\frac{2}{x}} \Leftrightarrow 2^{x-2}=3^{\frac{2}{x}-1} \Leftrightarrow x=2$.

c) $\sqrt[x]{27^{2x-1}}=\sqrt{9^{2x-1}} \Leftrightarrow \left(\sqrt[x]{27}\right)^{2x-1}=\left(\sqrt{9}\right)^{2x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt[x]{27}}{\sqrt{9}}\right)^{2x-1}=1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt[x]{27}}{\sqrt{9}}\right)^{2x-1}=\left(\frac{\sqrt[x]{27}}{\sqrt{9}}\right)^0 => 2x-1=0 => x=\frac{1}{2}$.

Napomena: Kako baza stepena na lijevoj strani jednačine: $\left(\frac{\sqrt[x]{27}}{\sqrt{9}}\right)^{2x-1}=1$, za $x=3$ postaje jedan, to je $x=3$, drugo rješenje posmatrane jednačine.

11.19.a) $3^x-2\cdot3^{x-2}=7 \Leftrightarrow 3^{x-2}(9-2)=7 \Leftrightarrow 3^{x-2}=1 \Leftrightarrow 3^{x-2}=3^0 \Leftrightarrow x=2$.

b) $4^x - 3\cdot 4^{x-2} = 13 \Leftrightarrow 4^{x-2}(16-3)=13 \Leftrightarrow 4^{x-2}=1 \Leftrightarrow 4^{x-2}=4^0 \Leftrightarrow x=2.$

c) $4\cdot 3^{x-1}+3^{x+1}=117 \Leftrightarrow 3^{x-1}(4+9)=117 \Leftrightarrow 3^{x-1}=3^2 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3.$

11.20.a) x=5 b) x=2 c) x=3 **11.21.**a) x=3 b) x=3 c) x=1

11.22.a) $4^{x-1}+4^x+4^{x+1}=84 \Leftrightarrow 4^{x-1}(1+4+16)=84 \Leftrightarrow 4^{x-1}=4 \Leftrightarrow x=2$

b) $2^{x-2}+2^x+2^{x+1}=104 \Leftrightarrow 2^{x-2}(1+4+8)=104 \Leftrightarrow 2^{x-2}=8 \Leftrightarrow x=5.$

11.23.a) $6^{x-1}+6^{x+1}+6^{x+2}=1518 \Leftrightarrow 6^{x-1}(1+36+216)=1518 \Leftrightarrow 6^{x-1}=6 \Leftrightarrow x=3.$

b) x=3

11.24.a) x=2 b) x=2 **11.25.**a) x=3 b) x=4

11.26.a) x=5 b) x=1 **11.27.**a) x=10 b) x=3

11.28.a) $3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^x+5^{x-1}+5^{x-2} \Leftrightarrow 3^{x-2}(3^3+3+1)=5^{x-2}(5^2+5+1)$

$\Leftrightarrow 3^{x-2}\cdot 31=5^{x-2}\cdot 31 \Leftrightarrow 3^{x-2}=5^{x-2} \Leftrightarrow \frac{3^{x-2}}{5^{x-2}}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x-2}=\left(\frac{3}{5}\right)^0 \Leftrightarrow$ x=2. b) x=1

11.29.a) $7^x+7^{x+1}=2^{x+4}+2^{x+3}+2^{x+2} \Leftrightarrow 7^x(1+7)=2^{x+2}(2^2+2+1)$

$\Leftrightarrow 7^x\cdot 8=2^{x+2}\cdot 7 \Leftrightarrow 7^{x-1}=2^{x+2-3} \Leftrightarrow 7^{x-1}=2^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^{x-1}=\left(\frac{7}{2}\right)^0 \Leftrightarrow$ x=1.

b) x = -1

11.30.a) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3} \Leftrightarrow 7\cdot 3^{x+1}-3^{x+4}=5^{x+2}-5^{x+3}$

$\Leftrightarrow 3^{x+1}(7-3^3)=5^{x+1}(5-25) \Leftrightarrow 20\cdot 3^{x+1}=20\cdot 5^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}=\left(\frac{3}{5}\right)^0 \Leftrightarrow$ x=-1.

b) $x=\frac{1}{2}$.

11.31.a) $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1} \Leftrightarrow 18\cdot 4^x+2\cdot 81\cdot 9^x=36\cdot 4\cdot 4^x-3\cdot 9\cdot 9^x$

$\Leftrightarrow 9\cdot 21\cdot 9^x=7\cdot 18\cdot 4^x \Leftrightarrow \frac{9^x}{4^x}=\frac{7\cdot 18}{9\cdot 21} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x=\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$

b) $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1} \Leftrightarrow 9^x+3^{2x-1}=2^{x+\frac{7}{2}}+2^{x+\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow 9^x(1+3^{-1})=2^x\left(2^{\frac{7}{2}}+2^{\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow 9^x\cdot\frac{4}{3}=2^x\cdot 9\cdot 2^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{9^x}{2^x}=\frac{9\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x=\frac{3^3}{2^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{2x}=\left(\frac{3}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^3 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

11.32.a) Uvođenjem smjene $2^x=t$, data jednačina se transformira na slijedeći način:

$4^x-9\cdot 2^x+8=0 \Leftrightarrow (2^x)^2-9\cdot 2^x+8=0 \Leftrightarrow t^2-9t+8=0 \Rightarrow t_1=1, t_2=8.$

$2^x=t_1 \Rightarrow 2^x=1 \Rightarrow x=0$; $2^x=t_2 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3.$

Rezultat: {0, 3}. b) {1, 2} c) $\{1, \frac{3}{2}\}$.

11.33.a) $5\cdot 2^{x+1}-4^x=16 \Leftrightarrow 10\cdot 2^x-(2^x)^2=16 \Leftrightarrow t^2-10t+16=0 \Rightarrow t_1=2, t_2=8.$

$2^x=t_1 \Rightarrow 2^x=2 \Rightarrow x=1$; $2^x=t_2 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3.$

b) $4^{x-1}-5\cdot 2^{x-2}=6 \Leftrightarrow 4\cdot(2^{x-2})^2-5\cdot 2^{x-2}=6 \Leftrightarrow (2^{x-2}=t, t>0), 4t^2-5t-6=0$

$\Rightarrow t=2.\ 2^{x-2}=2 \Leftrightarrow x-2=1 \Leftrightarrow x=3.$ **c) x=2**

11.34.a) $4^x+2^{x+3}=20 \Leftrightarrow (2^x)^2+8\cdot 2^x-20=0 \Leftrightarrow (2^x=t, t>0), t^2+8t-20=0 \Rightarrow t_1=2.$

$2^x=t_1 \Rightarrow 2^x=2 \Rightarrow x=1$. b) x=1, x=2 c) x=2, x=3

11.35.a) Nakon množenja jednačine sa 2^x dobije se ekvivalentna jednačina čije rješavanje se svodi na rješavanje jedne kvadratne i jednostavne eksponencijalne jednačine:

$2^x-8\cdot 2^{-x}=7 \Leftrightarrow (2^x-8\cdot 2^{-x})\cdot 2^x=7\cdot 2^x \Leftrightarrow (2^x)^2-7\cdot 2^x-8=0 \Rightarrow x=3.$

b) x=2 c) x=2

11.36.a) Dijeljenjem date jednačine sa 9^x dobijamo ekvivalentnu jednačinu koju možemo napisati u obliku kvadratne:

$$4^x+6^x=2\cdot 9^x \Leftrightarrow \frac{4^x+6^x}{9^x}=\frac{2\cdot 9^x}{9^x} \Leftrightarrow \frac{4^x}{9^x}+\frac{6^x}{9^x}=2 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2+\left(\frac{2}{3}\right)^x-2=0$$

Ako je $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t,\ t>0,$ *tada imamo*: $t^2+t-2=0 \Rightarrow t_1=1, t_2=-2 \Rightarrow x=0.$

b) x=1, x=0 c) x=2

11.37. Ako datu jednačinu pomnožimo sa $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$, dobićemo jednačinu koju možemo dovesti na kvadratnu:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{2x}+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \Leftrightarrow \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{2x}-4\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+1=0.$$

Uvođenjem smjene $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=t,\ t>0,$ dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2-4t+1=0$ čijim rješavanjem nalazimo $t_1=2+\sqrt{3}, t_2=2-\sqrt{3}$. Dalje je:

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=t_1 \Rightarrow \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3} \Rightarrow (2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}}=(2+\sqrt{3})^1 \Rightarrow x=2.$

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t_2 \Rightarrow \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3} \Rightarrow (2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = (2+\sqrt{3})^{-1} \Rightarrow x=-2.$

b) x = -4, x = 4

11.38.a) Dijeljenjem jednačine sa 27^x dobije se:

$$8^x+18^x-2\cdot 27^x=0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^3+\left(\frac{2}{3}\right)^x-2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=t, t^3+t-2=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2)=0 \Rightarrow t=1.$$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x=1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x=0.$ b) x = -2 c) $x=\frac{1}{2}$

11.39.a) Jednačina je definirana za x≥2 i može se dovesti na kvadratnu na slijedeći način:

$$4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}} \Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{x-2}}\right)^2-10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}+16=0 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x-2}}=t, t^2-10t+16=0$$

$\Leftrightarrow t_1=2, t_2=8.$ $2^{\sqrt{x-2}}=t_1 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x-2}}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=1 \Rightarrow x=3.$

$2^{\sqrt{x-2}}=t_2 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x-2}}=8 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x-2}}=2^3 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=3 \Rightarrow x=11.$ b) x=4

11.40. Slijedećim transformacijama datu jednačinu dovodimo do kvadratne:

$$2^{2x+1}+3^{2x+1}=5\cdot 6^x \Leftrightarrow 2\cdot 4^x+3\cdot 9^x-5\cdot 6^x=0 \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^x+3\cdot\left(\frac{9}{6}\right)^x-5=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}-5=0 \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=t, 2t^2-5t+3=0 \Leftrightarrow t_1=1,\ t_2=\frac{3}{2}.$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=t_1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x=0; \left(\frac{2}{3}\right)^x=t_2$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x=-1.$ b) x=2

11.41.a) x=0, x=1 b) x = 5

11.42.a) $2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}-6\left(2^x-\frac{1}{2^{x-1}}\right)=1 \Leftrightarrow \left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)\left[2^{4x}+2+\frac{4}{2^{2x}}\right]-6\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)-1=0$

$$\Leftrightarrow\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)\left[\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)^2+4\right]-6\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)-1=0 \Leftrightarrow 2^x-\frac{2}{2^x}=t,\ t(t^2+4)-6t-1=0$$

$$\Leftrightarrow t^3-2t-1=0 \Leftrightarrow (t^3+1)-(2t+2)=0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2-t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow t=-1 \vee t^2-t-1=0.$$

$$2^x-\frac{2}{2^x}=-1 \Leftrightarrow 2^{2x}+2^x-2=0 \Leftrightarrow 2^x=u,\ u^2+u-2=0 \Rightarrow u=1.$$

$2^x=1 \Leftrightarrow x=0.$ b) x=1.

11.43.a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}+3^{x-3}=99+\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{4-x}} \Leftrightarrow 3^{x-2}+3^{x-3}=99+\sqrt{9^{x-4}}$

$$\Leftrightarrow 3^{x-2}+3^{x-3}=99+3^{x-4} \Leftrightarrow 3^{x-2}+3^{x-3}-3^{x-4}=99$$

$$\Leftrightarrow 3^{x-4}(9+3-1)=99 \Leftrightarrow 3^{x-4}=3^2 \Leftrightarrow x=6.$$

b) $\sqrt{8^x\cdot\sqrt[3]{64^x\cdot\sqrt[x]{0,5}}}=2\cdot\sqrt[3]{16} \Leftrightarrow \sqrt{8^x\cdot\sqrt[3]{2^{6x}\cdot 2^{\frac{-1}{x}}}}=2\cdot 2^{\frac{4}{3}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2^{3x}\cdot\sqrt[3]{2^{6x-\frac{1}{x}}}}=2^{1+\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \sqrt{2^{3x}\cdot 2^{\frac{6x-\frac{1}{x}}{3}}}=2^{\frac{7}{3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x+\frac{6x-\frac{1}{x}}{3}}{2}}=2^{\frac{7}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+\frac{6x-\frac{1}{x}}{3}}{2}=\frac{7}{3} \Leftrightarrow 15x-\frac{1}{x}=14 \Leftrightarrow 15x^2-14x-1=0 \Leftrightarrow x_1=1, x_2=-\frac{1}{15}.$$

11.44. Dijeljenjem date jednačine sa x^{2000}, dobije se:

$$x^{2000}=(x+2000)^{2000} \Leftrightarrow 1=\left(\frac{x+2000}{x}\right)^{2000} \Leftrightarrow \frac{x+2000}{x}=\pm 1$$

$\Rightarrow \frac{x+2000}{x}=1$ ili $\frac{x+2000}{x}=-1 \Rightarrow$ x=-1000.

11.3. Eksponencijalna nejednačina (nejednadžba) oblika

$$a^{f(x)}<a^{g(x)}\ ,\ a^{f(x)}>a^{g(x)}$$

11.45.a) $2^x>4 \Leftrightarrow 2^x>2^2 \Leftrightarrow x>2$ b) $3^x<9 \Leftrightarrow 3^x<3^2 \Leftrightarrow x<2.$ c) x<2 d) x>3

11.46.a) $4^x>8 \Leftrightarrow 2^{2^x}>2^3 \Leftrightarrow 2x>3 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$ b) $x<\frac{3}{2}$ c) $x>\frac{3}{4}$ d) $x>\frac{2}{3}$

11.47.a) $25^x>125^{3x-2} \Leftrightarrow 5^{2x}>5^{3(3x-2)} \Leftrightarrow 2x>9x-6 \Leftrightarrow 7x<6 \Leftrightarrow x<\frac{6}{7}.$

b) $5^{4x-6}>25^{3x-4} \Leftrightarrow 5^{4x-6}>5^{2(3x-4)} \Leftrightarrow 4x-6>6x-8 \Leftrightarrow x<1.$ c) x>3.

11.48.a) x<2 b) x>3 c) $x>\frac{3}{2}$. d) x>1.

23.49.a) x>3 b) x<1 c) $x<-\frac{1}{3}$. d) $x\le\frac{5}{3}$.

11.50.a) $x<\frac{1}{2}$. b) $x<\frac{1}{6}$. c) $x\le\frac{2}{3}$ d) $x<\frac{2}{5}$

11.51.a) $3^{\frac{x+1}{x}}<3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x}<3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x}-3<0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x}<0$

$\Leftrightarrow (1-2x<0 \wedge x>0)\vee(1-2x>0 \wedge x<0) \Leftrightarrow x>\frac{1}{2} \vee x<0$.

b) $x<0$ c) $-\frac{1}{7}<x<0$ d) $x>\frac{1}{3}$

11.52.a) $15^x<4^x \Leftrightarrow \frac{4^x}{15^x}<1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{15}\right)^x<\left(\frac{4}{5}\right)^0 \Leftrightarrow x>0$. b) $x>0$ c) $x<0$ d) $x>\frac{1}{2}$

11.53.a) Nejednačina je ekvivalentna kvadratnoj nejednačini:
$x^2+1<5 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2$.

b) $2x^2-6>-4 \Leftrightarrow 2x^2>2 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow x<-1$ ili $x>1$. c) $0<x<2$ d) $x<\frac{1}{3}$

11.54.a) $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ b) $-3\le x\le 3$ c) $-3<x<3$

11.55.a) $8\cdot 2^{x^2-3x}<(0,5)^{-1} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x}<2^{-2} \Leftrightarrow x^2-3x+2<0 \Leftrightarrow x\in(1,2)$.
b) $x\in(1,3)$ c) $x\in\varnothing$

11.56.a) $3^{2x-x^2}<9 \Leftrightarrow 3^{2x-x^2}<3^2 \Leftrightarrow 2x-x^2<2 \Leftrightarrow x^2-2x+2>0 \Rightarrow x\in\varnothing$.

b) $x\in\varnothing$ c) $x\in\left(\frac{3-\sqrt{73}}{4},\frac{3+\sqrt{73}}{4}\right)$

11.57.a) $2^x+2^{x+3}<9 \Leftrightarrow 2^x(1+8)<9 \Leftrightarrow 2^x<1 \Leftrightarrow x<0$. b) $x>1$

11.58.a) $x<3$ b) $2^{x+3}-5^x<7\cdot 2^{x-2}-3\cdot 5^{x-1}$

$\Leftrightarrow 3\cdot 5^{x-1}-5^x<7\cdot 2^{x-2}-2^{x+3} \Leftrightarrow 5^{x-1}(3-5)<2^{x-2}(7-32)$

$\Leftrightarrow 5^{x-3}>2^{x-3} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{x-3}>1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{x-3}>\left(\frac{5}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x>3$.

11.59.a) $3^{x+2}+7^x>4\cdot 7^{x-1}+34\cdot 3^{x-1} \Leftrightarrow 3^{x-2}<7^{x-2} \Leftrightarrow x>2$. b) $x\ge 1$

11.60.a) $9^{x+1}+3^{x+2}-18>0 \Leftrightarrow 9\cdot 9^x+9\cdot 3^x-18>0 \Leftrightarrow (3^x)^2+3^x-2>0$

$\Leftrightarrow (3^x+2)(3^x-1)>0 \Leftrightarrow 3^x-1>0 \Leftrightarrow 3^x>1 \Leftrightarrow 3^x>3^0 \Leftrightarrow x>0$.

b) $5^{-x}>10$ c) $x<1$

11.61.a) Množenjem date nejednačine sa 5^x dobije se nejednačina koju možemo dovesti na kvadratnu:

$5^x-5^{3-x}<20 \Leftrightarrow (5^x)^2-5^3<20\cdot 5^x \Leftrightarrow (5^x)^2-20\cdot 5^x-125<0$

$\Leftrightarrow -5<5^x<25 \Leftrightarrow 5^x<25 \Leftrightarrow x<2$

b) $2^{2x+1}-5\cdot 6^x+3^{2x+1}\le 0 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x 3^x+3\cdot 3^{2x}\le 0$ /: 3^{2x}.

$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+3\le 0$. Uvođenjem smjene $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$, dobije se kvadratna nejednačina po t: $2t^2-5t+3\le 0 \Leftrightarrow 2(t-\frac{3}{2})(t-1)\le 0$, odakle se, dalje, nalazi: $1\le t\le\frac{3}{2}$, odnosno: $1\le\left(\frac{2}{3}\right)^x\le\frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^0\le\left(\frac{2}{3}\right)^x\le\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

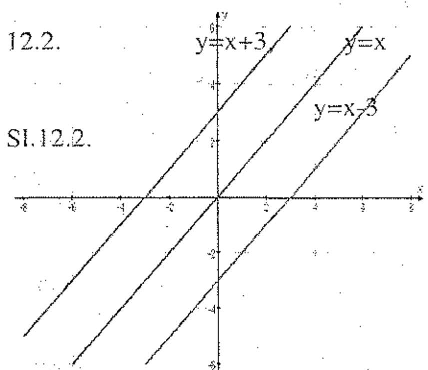
$\Leftrightarrow 0\ge x\ge -1$. c) $x<1$

12. LOGARITAM. LOGARITAMSKA FUNKCIJA. LOGARITAMSKE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

12.1. Pojam logaritma i logaritamske funkcije. Osobine i grafik logaritamske funkcije

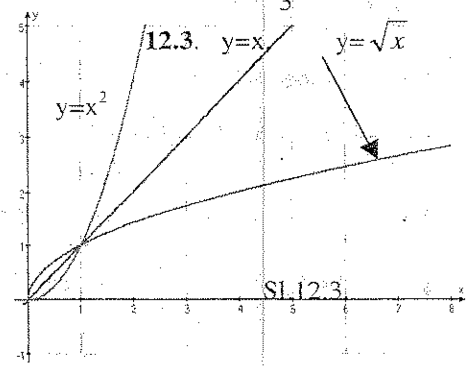
12.1.a) $y=x$ b) $y=x-1$ c) $y=x+4$ d) $y=\frac{x-1}{3}$.

12.2.



Sl.12.2.

12.3.



Sl.12.3.

12.4.a) $\log_2 32=5$ b) $\log_4 16=2$ c) $\log_3 81=4$ d) $\log_5 125=3$

12.5.a) $\log 100000=5$ b) $\log_5 1=0$ c) $\log_{\sqrt{3}} 3=2$ d) $\log_7 343=3$

12.6.a) $3^2=9$ b) $2^3=8$ c) $4^3=64$ d) $10^4=10000$

12.7.a) $3^{-2}=\frac{1}{9}$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$ c) $4^{-4}=\frac{1}{256}$ d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=125$

12.8.a) 2 b) 6 c) 3 d) 4 **12.9.**a) 0 b) −2 c) $x=\frac{2}{3}$ d) $x=\frac{3}{2}$

12.10.a) 5 b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{5}{4}$ **12.11.**a) 0 b) 0 c) 0 d) 0

12.12.a) -5 b) -4 c) -2 d) -4 **12.13.**a) −1 b) −3 c) 2 d) 6

12.14.a) $-\frac{2}{3}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) 4 d) -4 **12.15.**a) $-\frac{1}{8}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{4}{5}$ d) $\frac{3}{4}$

12.16.a) $\log_2 16 = x \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4.$

b) $x = 3$ c) x = 3 d) $x = \frac{3}{2}.$

12.17.a) x = 81 b) $x = \frac{1}{25}$ c) x=2 d) $x = \frac{5}{2}$

12.18.a) $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^{\frac{3}{4}} = \sqrt{8} \Leftrightarrow x^3 = \left(\sqrt{8}\right)^4 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = 4.$

b) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x^3 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow x = \frac{1}{4}.$ c) $x = 5\sqrt{5}$ d) $x = 2\sqrt{2}$

12.19.a) $\log_2 \log_9 81 = \log_2 2 = 1$ b) $\log_4 \log_2 16 = \log_4 4 = 1$

c) $\log_4 \log_9 81 = \log_4 2 = \frac{1}{2}$ d) $\log_9 \log_4 64 = \log_9 3 = \frac{1}{2}.$

12.20.a) $\log_2 \log_2 \log_2 16 = \log_2 \log_2 4 = \log_2 2 = 1$ b) $\log_5 \log_2 \log 100 = 0$

c) $\log_2 \log_2 \sqrt{2} = \log_2 \frac{1}{2} = -1.$ d) $\log_3 \log_4 \log_2 2^{64} = 1$

12.21.a) $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}} = \log_2 \log_2 2^{\frac{1}{8}} = \log_2 \frac{1}{8} = -3.$ b) -3 c) -3

d) $\sqrt{\log_{0.04} 25 + 1} = \sqrt{\log_{\frac{1}{25}} 25 + 1} = \sqrt{-1+1} = 0.$

12.22.a) 2 b) 8 c) 10 d) 15 **12.23.**a) 27 b) 9 c) 8 d) $\frac{1}{16}$

12.24.a) $2^{2-\log_2 5} = \frac{2^2}{2^{\log_2 5}} = \frac{4}{5}.$ b) $5^{\log_5 10 - 2} = \frac{5^{\log_5 10}}{5^2} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$ c) 2 d) 8000

12.25.a) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}} = \sqrt{10^2 \cdot 10^{\frac{1}{2}\log 16}} = 10 \cdot \sqrt{4} = 20.$ b) 242 c) $\frac{4}{3}$ d) 300

12.26.a) $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} \cdot 49^{\log_7 2} = \frac{81^{\frac{1}{4}}}{81^{\frac{1}{2}\log_9 4}} \cdot 7^{2\log_7 2} = \frac{3}{9^{\log_9 4}} \cdot \left(7^{\log_7 2}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3.$

b) $\frac{64}{3}$ c) 69

12.27. Logaritamska funkcija ima nulu za onu vrijednost varijable za koju logaritmand ima vrijednost 1. a) x=1 b) x=6 c) $x = -\frac{9}{2}$ d) $x = \pm 3$

12.28.a) x=3 b) x=-1 c) x=0 d) x=3

12.29. Logaritamska funkcija je definisana samo za pozitivne vrijednosti logaritmanda. a) 2-x>0 => x<2 b) x-1>0 => x>1. c) 4x-16>0 => x>4.

12.30.a) $\frac{x+1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow (x+1>0 \wedge x-2>0) \vee (x+1<0 \wedge x-2<0) \Rightarrow x<-1 \vee x>2.$

b) $x<-3 \vee x>2$ c) $-1<x<3$

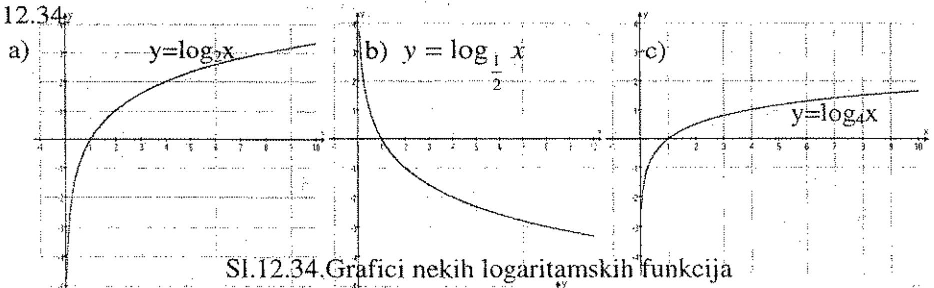
12.31.a) $x^2-3x-4>0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ b) $x \in (3, 4)$

c) $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ d) $x \in (-3, 0) \cup (0, +\infty)$

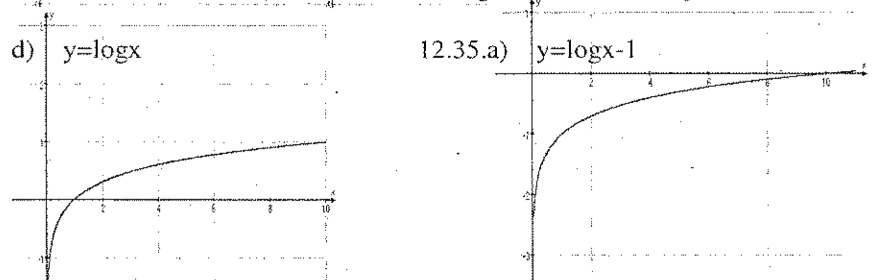
12.32.a) $x \in (-\infty, -5) \cup (-5, -2) \cup (2, +\infty)$ b) x>1

12.33.a) $x \in (2, +\infty)$ b) $x \in [0, +\infty)$ c) $x \in [3, +\infty)$

12.34.

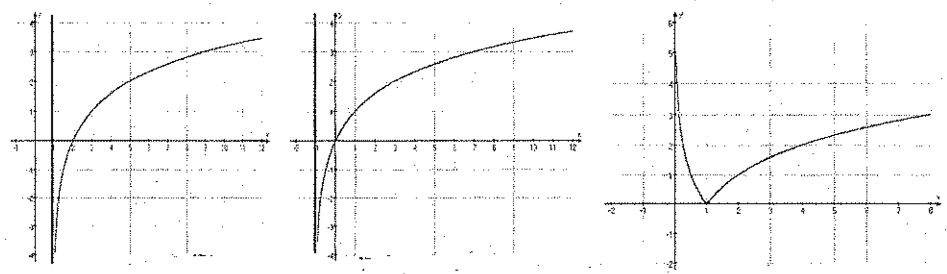


Sl.12.34.Grafici nekih logaritamskih funkcija

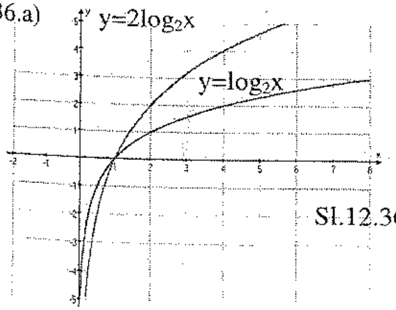


Sl.12.35. Grafici nekih logaritamskih funkcija

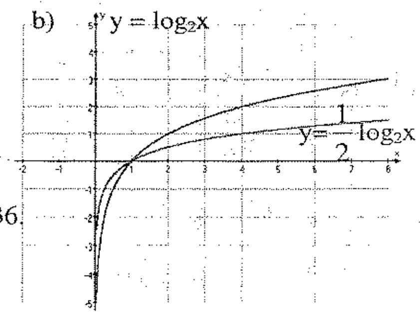
12.35.b) $y=\log_2(x-1)$ c) $y=\log_2(x+1)$ d) $y = |\log_2 x|$



12.36.a)

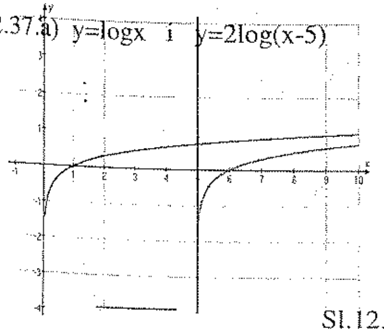


b)

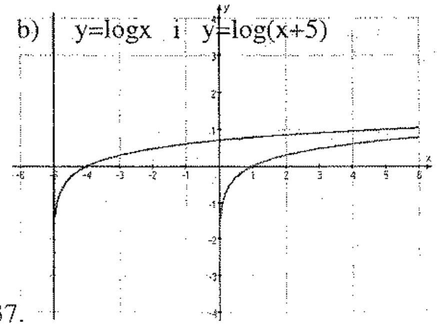


Sl.12.36.

12.37.a) y=logx i y=2log(x-5)



b) y=logx i y=log(x+5)



Sl.12.37.

12.2. Pravila logaritmiranja. Prelazak s jedne logaritamske baze na drugu

12.38.a) $\log_2(3\cdot4)=\log_2 3+\log_2 4$ b) $\log_2(4\cdot345)=\log_2 4+\log_2 345$

c) $\log_5(11\cdot237{,}5)=\log_5 11+\log_5 237{,}5$ d) $\log_2(78{,}43\cdot66{,}12)=\log_2 78{,}43+\log_2 66{,}12$

12.39.a) $\log_4(6\cdot7\cdot43)=\log_4 6+\log_4 7+\log_4 43$

b) $\log_4(184\cdot425\cdot67{,}13)=\log_4 184+\log_4 425+\log_4 67{,}13$

c) $\log_4(3478\cdot317{,}2\cdot98{,}128)=\log_4 3478+\log_4 317{,}2+\log_4 98{,}128$

12.40.a) $\log_4(5^3\cdot7)=\log_4 5^3+\log_4 7=3\log_4 5+\log_4 7$

b) $\log_7(42\cdot6^3)=\log_7 42+\log_7 6^3=\log_7 42+3\log_7 6$

c) $\log_7(78{,}2\cdot9^{12})=\log_7 78{,}2+\log_7 9^{12}=\log_7 78{,}2+12\log_7 9$

12.41.a) $\log_8\left(2\cdot\sqrt{3}\right)=\log_8 2+\log_8\sqrt{3}=\log_8 2+\frac{1}{2}\cdot\log_8 3.$

b) $\log_8\left(34\cdot\sqrt{567{,}2}\right)=\log_8 34+\log_8\sqrt{567{,}2}=\log_8 34+\frac{1}{2}\cdot\log_8 567{,}2.$

c) $\log_5\left(448{,}11\cdot\sqrt[3]{276{,}5}\right)=\log_5 448{,}11+\log_5\sqrt[3]{276{,}5}=\log_5 448{,}11+\frac{1}{3}\cdot\log_5 276{,}5.$

12.42.a) $\log_8\frac{5}{7}=\log_8 5-\log_8 7.$ b) $\log_3\frac{34}{65}=\log_3 34-\log_3 65.$

c) $\log_8\frac{56{,}72}{33{,}95}=\log_8 56{,}72-\log_8 33{,}95.$

d) $\log_{11}\frac{7{,}128}{34{,}53}=\log_{11} 7{,}128-\log_{11} 33{,}95.$

12.43.a) $\log_4 4xy^3=\log_4 4+\log_4 x+\log_4 y^3=1+\log_4 x+3\log_4 y.$

b) $\log_5 56x^2y^5=\log_5 56+\log_5 x^2+\log_5 y^5=\log_5 56+2\log_5 x+5\log_5 y.$

c) $\log_5 43a^4bc^5=\log_5 43+\log_5 a^4+\log_5 b+\log_5 y^5=\log_5 43+4\log_5 a+\log_5 b+5\log_5 y$

d) $\log_{13} 13{,}2a^8b^{11}c^{-2}=\log_{13} 13{,}2+8\log_{13} a+11\cdot\log_{13} b-2\cdot\log_{13} c.$

12.44.a) $\log_5\frac{5x^2}{3y^4}=\log_5 5x^2-\log_5 3y^4=\log_5 5+2\log_5 x-\log_5 3-4\log_5 y.$

b) $\log_2\frac{11ab^3}{8x^2y}=\log_2 11ab^3-\log_2 8x^2y=\log_2 11+\log_2 a+3\log_2 b-\log_2 8-2\log_2 x-\log_2 y.$

c) $\log_6\frac{66a^3b^5c}{5x^3y^4}=\log_6 66a^3b^5c-\log_6 5x^3y^4=$

$=\log_6 66+\log_6 a^3+\log_6 b^5+\log_6 c-\left(\log_6 5+\log_6 x^3+\log_6 y^4\right)=$

$=\log_6 66+3\log_6 a+5\log_6 b+\log_6 c-\left(\log_6 5+3\log_6 x+4\log_6 y\right)=$

$=\log_6 66+3\log_6 a+5\log_6 b+\log_6 c-\log_6 5-3\log_6 x-4\log_6 y.$

d) $\log_9\frac{26{,}17a^5b^7x}{3{,}8c^6y^5}=\log_9 26{,}17a^5b^7x-\log_9 3{,}8c^6y^5=$

$=\log_9 26{,}17+5\log_9 a+7\log_9 b+\log_9 x-\log_9 3{,}8-6\log_9 c-5\log_9 y.$

12.45.a) $\log 43a^2b^3=\log 43+2\log a+3\log b.$

b) $\log\frac{17x^4}{2a^5}=\log 17x^4-\log 2a^5=\log 17+4\log x-\log 2-5\log a.$

c) $\log\frac{6\sqrt{a}}{7a^3}=\log 6\sqrt{a}-\log 7a^3=\log 6+\frac{1}{2}\log a-\log 7-3\log a.$

d) $\log\sqrt{\frac{2a}{3x^5}}=\frac{1}{2}\log\frac{2a}{3x^5}=\frac{1}{2}\left(\log 2a-\log 3x^5\right)=\frac{1}{2}\left(\log 2+\log a-\log 3-5\log x\right).$

12.46.a) $\log\frac{\sqrt{a\sqrt{a}}}{4}=\log\sqrt{a\sqrt{a}}-\log 4=\frac{1}{2}\log a\sqrt{a}-\log 4=\frac{1}{2}\left(\log a+\frac{1}{2}\log a\right)-\log 4.$

b) $\log\frac{7\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}{8y}=\log 7\sqrt{x\sqrt[3]{x}}-\log 8y=\log 7+\frac{1}{2}\left(\log x+\frac{1}{3}\log x\right)-\log 8-\log y.$

c) $\log\frac{6{,}1\sqrt[3]{2b\sqrt{a}}}{5y^4}=\log 6{,}1\sqrt[3]{2b\sqrt{a}}-\log 5y^4=\log 6{,}1+\frac{1}{3}\left(\log 2+\log b+\frac{1}{2}\log a\right)-\log 5-4\log y.$

d) $\log\dfrac{89\sqrt{7\sqrt{a\sqrt{b}}}}{3\sqrt{a}}=\log 89\sqrt{7\sqrt{a\sqrt{b}}}-\log 3\sqrt{a}=$

$$=\log 89+\frac{1}{2}\left(\log 7+\frac{1}{2}\left(\log a+\frac{1}{2}\log b\right)\right)-\log 3-\frac{1}{2}\log a.$$

12.47.a) logx=log5+log2=log10 => x=10. b) logx=log12+log4=log48=> x=48.
c) logx=log25+log2=log50 => x=50.

12.48.a) logx=2log4=log4^2=log16 => x=16. b) logx=3log2=log2^3=log8=>x=8.
c) logx=-2log9=log9^{-2} => x=9^{-2}.

12.49.a) logx=log4+log5-log2=log10 => x=10.
b) logx=log2+log4-log7=log$\frac{8}{7}$ => x=$\frac{8}{7}$. **12.50**.a) x=3 b) x=2 c) x=16

12.51.a) logx=log81-log8 => $x=\frac{81}{8}$. b) logx=log9+log4=log36, x=36
c) x=18 **12.52**.a) x=24 b) x=8

12.53.a) $\log x=\frac{3}{4}(\log 2+\log m-\log 4)=\frac{3}{4}\log\frac{2m}{4}=\log\sqrt[4]{\left(\frac{2m}{4}\right)^3}\Rightarrow x=\sqrt[4]{\left(\frac{2m}{4}\right)^3}.$

b) $\log x=\log(a+b)-\frac{2}{3}\left(2\log a+\frac{3}{4}\log b\right)=\log(a+b)-\frac{2}{3}\log\left(a^2\sqrt[4]{b^3}\right)=$

$$=\log(a+b)-\log\sqrt[3]{\left(a^2\sqrt[4]{b^3}\right)^2}=\log\frac{a+b}{\sqrt[3]{\left(a^2\sqrt[4]{b^3}\right)^2}}\Rightarrow x=\frac{a+b}{\sqrt[3]{\left(a^2\sqrt[4]{b^3}\right)^2}}.$$

12.54. $\log x=-2\log a+\frac{1}{3}\left[\log(a+b)+\frac{3}{4}\log(a-b)-\log b-\frac{1}{2}\log c\right]=$

$$=\log a^{-2}+\frac{1}{3}\left[\log(a+b)+\log\sqrt[4]{(a-b)^3}-\log b-\log\sqrt{c}\right]=$$

$$=\log a^{-2}+\frac{1}{3}\log\frac{(a+b)\sqrt[4]{(a-b)^3}}{b+\sqrt{c}}=\log a^{-2}+\log\sqrt[3]{\frac{(a+b)\sqrt[4]{(a-b)^3}}{b+\sqrt{c}}}=$$

$$=\log\left[a^{-2}\cdot\sqrt[3]{\frac{(a+b)\sqrt[4]{(a-b)^3}}{b+\sqrt{c}}}\right]\Rightarrow x=a^{-2}\cdot\sqrt[3]{\frac{(a+b)\sqrt[4]{(a-b)^3}}{b+\sqrt{c}}}.$$

12.55. $\log x=-\log 5+\frac{2}{5}\left[2\log a+\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{3}(\log a-\log b)-\log a\right]=$

$$=-\log 5+\frac{2}{5}\left[\log a^2+\log\sqrt{3}-\frac{1}{3}\left(\log\frac{a}{b}\right)-\log a\right]=-\log 5+\frac{2}{5}\log\frac{a^2\sqrt{3}}{a\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}=$$

$$=\log\frac{1}{5}+\log\sqrt[5]{\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{a\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}\right)^2}=\log\left[\frac{1}{5}\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{a\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}\right)^2}\right]\Rightarrow x=\frac{1}{5}\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{a\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}\right)^2}$$

12.56.a) $\log_4\log_4\sqrt{4}=\log_4\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$ b) $\log_3\log_2\sqrt[3]{2}=\log_3\frac{1}{3}=-1$

c) $\log\log\sqrt[3]{1000}=\log\log 10=\log 1=0.$

12.57.a) $\dfrac{3\log_7 2-\log_7 24}{\log_7 3+\log_7 9}=\dfrac{\log_7 8-\log_7 24}{\log_7 27}=\dfrac{\log_7\frac{8}{24}}{\log_7 27}=\dfrac{\log_7\frac{1}{3}}{3\log_7 3}=\dfrac{-\log_7 3}{3\log_7 3}=-\dfrac{1}{3}.$

b) $\dfrac{\log_4 45+2\log_4\frac{1}{3}}{\log_4 75-\log_4 3}=\dfrac{\log_4 45+\log_4\frac{1}{9}}{\log_4\frac{75}{3}}=\dfrac{\log_4 5}{\log_4 25}=\dfrac{\log_4 5}{2\log_4 5}=\dfrac{1}{2}.$

12.58.a) $\log_3 25\cdot\log_{25}9=2\log_3 5\cdot 2\log_{25}3=4\log_3 5\cdot\dfrac{1}{\log_3 25}=\dfrac{4\log_3 5}{2\log_3 5}=2.$

b) $\log_2 10\cdot\log 16=\log_2 10\cdot 4\log 2=4\log_2 10\cdot\dfrac{1}{\log_2 10}=\dfrac{4\log_2 10}{\log_2 10}=4.$

c) $\log_5 36\cdot\log_6 125=2\log_5 6\cdot 3\log_6 5=6\log_5 6\cdot\dfrac{1}{\log_5 6}=6.$

12.59.a) $\log 27\cdot\log 16=3\log 3\cdot 4\log 2=12\cdot\dfrac{1}{\log 8}\cdot\dfrac{1}{\log 9}=\dfrac{12}{3\log 2}\cdot\dfrac{1}{2\log 3}=\dfrac{2}{\log 2}\cdot\log 2=2.$

b) $\log_4 125\cdot\log_{25}2=3\log_4 5\cdot\dfrac{1}{\log_2 25}=\dfrac{3}{\log_5 4}\cdot\dfrac{1}{2\log_2 5}=\dfrac{3}{2\log_5 2}\cdot\dfrac{\log_5 2}{2}=\dfrac{3}{4}.$

c) $\log_{27}1000\cdot\log 81=3\log_{27}10\cdot 4\log 3=\dfrac{3}{\log 27}\cdot 4\log 3=\dfrac{3}{3\log 3}\cdot 4\log 3=4.$

12.60.a) $4^{\log_3 27}=4^{3\log_3 3}=4^3=64$ b) $16^{\log_4 25}=\left(4^{\log_4 25}\right)^2=25^2=625.$

c) $9^{\log_{81}256}=\left(81^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{81}256}=\left(81^{\log_{81}256}\right)^{\frac{1}{2}}=256^{\frac{1}{2}}=16.$

12.61. Za logaritamsku funkciju vrijedi:
1) $(0<M<N \wedge a>1)$ => $\log_a M<\log_a N$;
2) $(0<M<N \wedge 0<a<1)$ => $\log_a M>\log_a N$.

a) $\log_3 8<\log_3 11$ b) $\log_{\frac{2}{3}}7>\log_{\frac{2}{3}}9$ c) $\log_5 11>\log_5 4.$

12.62.a) $\log_5 12 > \log_6 12.$ b) $\log_3 \frac{4}{7} > \log_7 \frac{4}{7}.$ c) $\log_{25} 100 < \log_{22} 100.$

12.63.a) $\log 27{,}13 > 0$ b) $\log_3 1{,}94 > 0$ c) $\log_5 0{,}59 < 0$ d) $\log_2 \frac{17}{35} < 0$

12.64.a) $\log_{\frac{1}{2}} 97 < 0$ b) $\log_{0{,}74} \frac{4}{7} > 0$ c) $\log_{\frac{5}{8}} 66{,}83 < 0$ d) $\log_{\frac{1}{10}} 0{,}0005 > 0$

12.65. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a} = \frac{1}{6}\log_{\sqrt{3}} a = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\log_a \sqrt{3}} = \frac{1}{3\log_a 3} = \frac{1}{\log_a 27} = \frac{1}{b}.$

12.66. $\log_{24} 54 = \log_{24}(2 \cdot 27) = \log_{24}(2 \cdot 3^3) = \log_{24} 2 + 3\log_{24} 3 = \frac{1}{\log_2 24} + \frac{3}{\log_3 24} =$

$= \frac{1}{\log_2(3 \cdot 2^3)} + \frac{3}{\log_3(3 \cdot 2^3)} = \frac{1}{\log_2 3 + 3} + \frac{3}{1 + 3\log_3 2} = \frac{1}{\log_2 3 + 3} + \frac{3}{1 + \frac{3}{\log_2 3}} = \frac{1}{m+3} + \frac{3}{1 + \frac{3}{m}} =$

$= \frac{1}{m+3} + \frac{3m}{m+3} = \frac{1+3m}{m+3}.$

12.67. $\log 8 = \frac{\log_{30} 8}{\log_{30} 10} \Rightarrow \log_{30} 8 = \log 8 \cdot \log_{30} 10 = 3\log 2 \cdot \frac{1}{\log 30} = \frac{3\log\frac{10}{5}}{\log(10 \cdot 3)} = \frac{3 - 3\log 5}{1 + \log 3} = \frac{3(1-a)}{1+b}.$

12.68. $\log 56 = \log(8 \cdot 7) = \log 8 + \log 7 = 3\log 2 + \log_2 7 \cdot \log 2 = \log 2(3 + \log_2 7) = a(3+b).$

12.69. $\log_{25} 12 = \frac{\log_5 12}{\log_5 25} = \frac{\log_5 4 \cdot 3}{2} = \frac{\log_5 4 + \log_5 3}{2} = \frac{a+b}{2}.$

****

12.70.a) $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$ b) $\log_{a^k} a^n = n\log_{a^k} a = \frac{n}{\log_a a^k} = \frac{n}{k}.$

12.71.a) $\log_3 5 = \frac{\log_6 5}{\log_6 3} = \frac{\log_6 5}{\log_6 \frac{6}{2}} = \frac{\log_6 5}{\log_6 6 - \log_6 2} = \frac{\log_6 5}{1 - \log_6 2}.$

b) $a^{\frac{\log_b \log_b a}{\log_b a}} = a^{\log_b \log_b a \cdot \log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b \log_b a} = b^{\log_b \log_b a} = \log_b a.$

12.72.a) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_8 5 = \frac{\log_4 2}{\log_4 3} \cdot \log_4 3 \cdot \frac{\log_8 4}{\log_8 5} \cdot \log_8 5 =$

$= \log_4 2 \cdot \log_8 4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$

b) Uputa: Transformirati sve logaritme na logaritme za bazu 8.

12.73.a) $\frac{\log_a N}{\log_{ab} N} = \frac{\log_N ab}{\log_N a} = \frac{\log_N a + \log_N b}{\log_N a} = \frac{\log_N a}{\log_N a} + \frac{\log_N b}{\log_N a} = 1 + \log_a b.$

b) $\log_{\frac{1}{m}} \frac{1}{n} = \log_{\frac{1}{m}} 1 - \log_{\frac{1}{m}} n = 0 - \frac{1}{\log_n \frac{1}{m}} = \frac{-1}{\log_n 1 - \log_n m} = \frac{1}{\log_n m} = \log_m n.$

12.74.a) $\log_{bn} an = \frac{\log_b an}{\log_b bn} = \frac{\log_b a + \log_b n}{\log_b b + \log_b n} = \frac{\log_b a + \log_b b}{1 + \log_b n}.$

b) $\log_{b^{n+1}} ab^n = \frac{\log_b ab^n}{\log_b b^{n+1}} = \frac{\log_b a + \log_b b^n}{(n+1)\log_b b} = \frac{\log_b a + n\log_b b}{n+1} = \frac{\log_b a + n}{1+n}$

12.75. $a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 9ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$

$\Leftrightarrow \log_c \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \log_c ab \Leftrightarrow 2\log_c \frac{a+b}{3} = \log_c a + \log_c b$

$\Leftrightarrow \log_c \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_c a + \log_c b).$

12.76. $ab = c^2 \Rightarrow \log_{ab} ab = \log_{ab} c^2 \Rightarrow 1 = 2\log_{ab} c \Rightarrow \log_{ab} c = \frac{1}{2}.$

12.77. $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow c^2 - b^2 = a^2 \Leftrightarrow (c+b)(c-b) = a^2 \Leftrightarrow \log_a(c+b)(c-b) + \log_a a^2$

$\Leftrightarrow \log_a(b+c) + \log_a(c-b) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{b+c} a} + \frac{1}{\log_{c-b} a} = 2$

$\Leftrightarrow \log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a.$

12.78. Logaritmiranjem datih jednakosti uzimajući za bazu 10, dobivamo:

$y = 10^{\frac{1}{1-\log x}} \Rightarrow \log y = \frac{1}{1-\log x},$ $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}} \Rightarrow \log z = \frac{1}{1-\log y}.$

Uvrštavanjem dobijene vrijednosti za logy u izraz za logz, dalje vrijedi:

$\log z = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-\log x}} = \frac{1-\log x}{1-\log x-1} = \frac{1-\log x}{-\log x} \Rightarrow$ -logxlogz=1-logx

=> logx(1-logz)=1 => $\log x = \frac{1}{1-\log z} \Rightarrow 10^{\frac{1}{1-\log z}} = x.$

12.79. $\frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_c N} = \log_N a + \log_N c = \log_N ac = \log_N b^2 = 2\log_N b = \frac{2}{\log_b N}.$

12.3. Dekadski logaritmi (logaritmi u odnosu na bazu 10)

12.80.a) $\log 4 = 2\log 2 = 2 \cdot 0{,}30103 = 0{,}60206$ b) $\log 8 = 3\log 2 = 3 \cdot 0{,}30103 = 0{,}90309$
c) $\log 32 = 5\log 2 = 1{,}50515$ d) $\log 128 = 7\log 2 = 2{,}10721$

12.81.a) log6 = log3+log2 = 0,47712+0,30103 = 0,77815

b) log18 = log9+log2 = 2log3+log2 = 2·0,47712+0,30103 =1,025527

c) log36 = log4+log9 =2log2+2log3 =2·0,30103+2·0,47712 = 1,55630

d) log108 = log27+log4 = 3log3+2log2 = 3·0,47712+2·0,30103 = 2,03342

12.82.a) 1 b) 0 c) 2 d) 3 **12.83**.a) -1 b) -3 c) –1 d) -3

12.84.a) k=2 b) k=0 c) k=3 **12.85**.a) k=-2 b) k=-1 c) k=-3

12.86.a) log11=1,04139 b) log123=2,08990

c) log4578=3,6606 d) log66712=4,74595

12.87.a) 2,36922 b) 0,36922 c) 1,36922 d) 0,36922-1

12.88.a) 1,99220 b) 2,99449 c) 2,38970 d) 0,95890

12.89.a) -2,24342 b) -3,05178 c) -1,39732 d) -1,67799

12.90.a) x=200 b) x=33,91 c) x=1,52

12.91.a) x=0,1598 b) x=0,00514 c) x=0,0005757

12.92.a) x=27,542 b) x=4,6989 c) x=3083,1879

12.93.a) x=0,2113 b) x=0,000004645 c) $x=4{,}0738027\cdot 10^{-16}$

12.94.a) log(34·53) = log34+log53 = 1,53148+1,72428 = 3,25576

b) log(45,22·89,25) = log45,22+log89,25 = 1,65533+1,95061 = 3,60594

c) log(78,12·9,271) = log78,12+log9,271 = 1,89276+0,96713 = 2,85989

12.95.a) $\log\frac{43}{57}$ = log43-log57 =1,63347-1,75587 = -0,12240 = 0,87760-1

b) $\log\frac{34{,}55}{8{,}433}$ = log34,55-log8,433 =1,53845-0,93598 = 0,60247.

c) $\log\frac{9{,}887}{4{,}876}$ = log9,887-log4,876 = 0,99506-0,68806 = 0,307.

12.96.a) $\log 4^{12} = 12\cdot\log 4 = 12\cdot 0{,}60206 = 7{,}22472$

b) $\log 2\cdot 3^{5,1} = \log 2+\log 3^{5,1} = \log 2+5{,}1\cdot\log 3 = 0{,}30103+5{,}1\cdot 0{,}47712 = 2{,}73434$

c) $\log 5^{3,2}\cdot 12{,}3 = 3{,}2\cdot\log 5+\log 12{,}3 = 2{,}23670+1{,}08991= 3{,}32661.$

92.97.a) $\log\sqrt{43{,}17} = \frac{\log 43{,}17}{2} = \frac{1{,}63518}{2} = 0{,}81759.$

b) $\log\sqrt[3]{14{,}46} = \frac{\log 14{,}46}{3} = \frac{1{,}16017}{3} = 0{,}38672.$

c) $\log\sqrt[4]{887\cdot 3{,}175} = \frac{\log(887\cdot 3{,}175)}{4} = \frac{\log 887+\log 3{,}175}{4} = \frac{1{,}94792+0{,}50174}{4} = 0{,}61242$

12.98.a) $\log\frac{8{,}73}{0{,}987\cdot 35{,}11} = \log 8{,}73-\log 0{,}987-\log 35{,}11 = 0{,}94101+0{,}00568-1{,}54543 =$

$= -0{,}59874 = 0{,}40126-1.$

b) $\log\left(345{,}7\cdot\sqrt[3]{832{,}8}\right) = \log 345{,}7+\frac{\log 832{,}8}{3} = 2{,}53870+0{,}98993 = 3{,}52863.$

c) $\log\frac{\sqrt{4{,}93}\cdot\sqrt[3]{7{,}982}}{2{,}63\cdot\sqrt[5]{91{,}37}} = \log\sqrt{4{,}93}+\log\sqrt[3]{7{,}982}-\log 2{,}63-\log\sqrt[5]{91{,}37} =$

$= \frac{\log 4{,}93}{2}+\frac{\log 7{,}982}{3}-\log 2{,}63-\frac{\log 91{,}37}{5} =$

$= 0.34642+0{,}30070-0{,}41996-0{,}39216 = -0{,}165 = 0{,}835-1.$

12.99.a) $x = 66{,}3\cdot 18{,}94 \Leftrightarrow$ logx=log(66,3·18,94) $\Leftrightarrow$ logx=log66,3+log18,94

$\Leftrightarrow$ logx=1,82151+1,27738 $\Leftrightarrow$ logx=3,09889 $\Leftrightarrow$ x=1255,7119.

b) $x = 0{,}9734\cdot 67{,}72 \Leftrightarrow$ logx = log0,9734+log67,72 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ logx=-,02517+1,83072 $\Leftrightarrow$ logx = 1,80555 $\Leftrightarrow$ x=63,90737.

c) $x = 7{,}4815\cdot 812{,}4 \Leftrightarrow$ logx=3,783759 $\Leftrightarrow$ x=6077,971

12.100.a) $x = \frac{88{,}45}{34{,}7} \Leftrightarrow \log x = \log\frac{88{,}45}{34{,}7} \Leftrightarrow \log x = \log 88{,}45-\log 34{,}7$

$\Leftrightarrow \log x = 1.94670-1.54033 \Leftrightarrow \log x = 0{,}40637 \Leftrightarrow x = 2{,}54899.$

b) $x = \frac{25{,}3}{321{,}8} \Leftrightarrow \log x = \log\frac{25{,}3}{321{,}8} \Leftrightarrow \log x = -1{,}10447 \Leftrightarrow x = 0{,}0786.$

c) $x = \frac{44{,}2^2}{18{,}55} \Leftrightarrow \log x = \log\frac{44{,}2^2}{18{,}55} \Leftrightarrow \log x = 2\log 44{,}2-\log 18{,}55$

$\Leftrightarrow \log x = 3.29084-1.26834 \Leftrightarrow \log x = 2{,}0225 \Leftrightarrow x = 105{,}31737.$

12.101.a) $x = 83{,}45^{3,5} \Leftrightarrow \log x = \log 83{,}45^{3,5} \Leftrightarrow \log x = 3{,}5\log 83{,}45$

$\Leftrightarrow \log x = 3{,}5\cdot 1{,}921426 \Leftrightarrow \log x = 6{,}724992 \Rightarrow x = 5308749{,}016$

b) $x = 6{,}3\cdot 5{,}04^3 \Leftrightarrow \log x = \log\left(6{,}3\cdot 5{,}04^3\right) \Leftrightarrow \log x = \log 6{,}3+3\log 5{,}04$

$\Leftrightarrow$ logx=0,799341+2,107192 $\Leftrightarrow$ logx=2,906533 => x=806,367

c) $x = 7{,}11^{2,1}\cdot 0{,}543^3 \Leftrightarrow \log x = 2{,}1\log 7{,}11+3\log 0{,}543$

$\Leftrightarrow \log x = 0{,}9933257$ => x=9,84749.

12.102.a) $x = \sqrt{941} \Leftrightarrow \log x = \log\sqrt{941} \Leftrightarrow \log x = \frac{\log 941}{2} \Leftrightarrow \log x = 1{,}48679$

=> x=30,6757.

b) $x = \sqrt{819{,}4} \Leftrightarrow \log x = \frac{\log 819{,}4}{2} \Leftrightarrow \log x = 1{,}45674798 \Rightarrow x = 28{,}625$

c) $x = \sqrt{24{,}877} \Leftrightarrow \log x = 0{,}697899 \Rightarrow x = 4{,}98768.$

12.103.a) $x = \sqrt[3]{125} \Leftrightarrow \log x = \frac{\log 125}{3} \Leftrightarrow \log x = 0{,}69897 \Rightarrow x = 5.$

b) $x = \sqrt[3]{654{,}92} \Leftrightarrow \log x = \frac{\log 645{,}92}{3} \Leftrightarrow \log x = 0{,}936726 \Rightarrow x = 8{,}64423$

c) $x = \sqrt[4]{38{,}799} \Leftrightarrow \log x = \frac{\log 38{,}799}{4} \Leftrightarrow \log x = 0{,}397205 \Rightarrow x = 2{,}49577$

12.104.a) $x=\frac{18,32\cdot 4,231}{45,21} \Leftrightarrow \log x=\log\frac{18,32\cdot 4,231}{45,21} \Leftrightarrow \log x=\log(18,32\cdot 4,231)-\log 45,21$

$\Leftrightarrow$ logx=log183,2+log4,231-log45,21 $\Leftrightarrow$ logx=1,234134 => x=17,14486.

b) x=98,178815 c) x=21,84149

12.105.a) $x=\frac{3,45\cdot 11,43^2}{18,54^4} \Leftrightarrow \log x=\log 3,45+2\log 11,43-4\log 18,54 \Leftrightarrow \log x=-2,4185$

=> x=0,003815. b) x=0,000000006 c) x=821,44275

12.106.a) x=28,06678 b) x=0,017234 c) x=0,0556989

12.107.a) $x=\sqrt[3]{345,9+\sqrt{67,3\cdot 11,09^3}}$, $y=\sqrt{67,3\cdot 11,09^3}$; $\log y=\log\sqrt{67,3\cdot 11,09^3}$

$$\Rightarrow \log y=\frac{\log 67,3+3\log 11,09}{2} \Rightarrow \log y=2,48140 \Rightarrow y=302,974.$$

$$x=\sqrt[3]{345,9+y}=\sqrt[3]{345,9+302,974}=\sqrt[3]{648,874}=8,65738.$$

b) $x=\frac{0,99452^3}{\sqrt{34,335}}+\sqrt[3]{\frac{11,78}{3,445^2}}=0,1678696+0,99258=1,1604496$

12.4. Logaritamske jednačine (jednadžbe)

12.108. Logaritamske jednačine rješavamo u oblasti u kojoj su definirane. Ponekada ćemo prvo odrediti oblast definiranosti logaritamske jednačine, a zatim je rješavati, ali ćemo češće tražiti moguća rješenja logaritamske jednačine i zatim provjeravati koji od dobivenih brojeva su zaista rješenja.

a) x=1000 b) x+1=100 => x=99 c) 2x=10 => x=5

12.109.a) x-1=10000 => x=10001 b) $2-x=10^{-1}$ => x=1,9 c) x+5=1 => x=-4.

12.110.a) logx+log4=0 $\Leftrightarrow$ log4x=log1 $\Leftrightarrow$ 4x=1 $\Leftrightarrow$ x=0,25.

b) 2logx+log2=log98 => $\log x^2+\log 2=\log 98$ $\Leftrightarrow$ $\log 2x^2=\log 98$

$\Leftrightarrow$ $2x^2=98$ $\Leftrightarrow$ $x^2=49$ => x=7 , (broj -7 nije i rješenje početne logaritamske jednačine zato što jednačina nije definirana za tu vrijednost varijable).

c) 3logx-log5=log25 => $\log\frac{x^3}{5}=\log 25 \Rightarrow \frac{x^3}{5}=25 \Rightarrow x^3=125$ => x=5

12.111.a) $\log_3(x^2-1)=1$ => $x^2-1=3$ => $x^2=4$ => $x=\pm 2$.

b) $\log_5(x^2+1)=1$ => $x^2+1=5$ => $x^2=4$ => $x=\pm 2$.

c) $\log_7(2x^2-1)=1$ => $2x^2-1=7$ => $x^2=4$ => $x=\pm 2$.

12.112.a) logx+log4=3 => log4x=log1000 => 4x=1000 => x=250.

b) logx+log16=log48 => log16x=log48 => 16x=48 => x=3.

c) 2logx+log6=log150 => $\log 6x^2=\log 150$ => $6x^2=150$ => x=5.

12.113.a) $\log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)=2 \Leftrightarrow -\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow -\frac{1}{x}=\frac{1}{9} \Rightarrow x=-9.$

b) $\log(3x+1)^2=0 \Rightarrow (3x+1)^2=1 \Rightarrow 3x+1=\pm 1 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=-\frac{2}{3}.$

c) $\frac{1}{5}\log_x\frac{1}{32}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_x\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_x\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=4.$

12.114.a) Nema rješenja. b) Nema rješenja c) Nema rješenja.

12.115.a) $\log\frac{x}{4}+\log\left(\frac{x}{2}-1\right)=0 \Rightarrow \log\frac{x}{4}\left(\frac{x}{2}-1\right)=\log 1 \Rightarrow \frac{x}{4}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}=1 \Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow x=4.$$

b) $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=2 \Rightarrow \log_2(x-1)(x+2)=\log_2 4$

$$\Rightarrow (x-1)(x+2)=4 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x=2.$$

c) $\log_3(9-2x)+\log_3 x=2 \Rightarrow \log_3 x(9-2x)=\log 9 \Rightarrow x(9-2x)=9$

=> $2x^2-9x+9=0$ => $x_1=3$, $x_2=1,5$.

12.116.a) Jednačina je definisana za 2x>0 i 4x-15>0 i 4x-15≠1, odnosno, $x>\frac{15}{4}\wedge x\neq 4$. U oblasti definisanosti jednačine vrijedi:

$$\frac{\log 2x}{\log(4x-15)}=2 \Leftrightarrow \log 2x=\log(4x-15)^2 \Rightarrow 2x=(4x-15)^2 \Rightarrow$$

$$2x=(4x-15)^2 \Rightarrow 16x^2-122x+225=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{122\pm\sqrt{122^2-64\cdot 225}}{32}$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{122\pm\sqrt{484}}{32}=\frac{122\pm 22}{32},\ x_1=\frac{9}{2},\ \left(x_2=\frac{25}{8},\ \text{ovo nije rješenje}\right).$$

b) $\frac{2\log x}{2-\log 5}=2 \Leftrightarrow 2\log x=4-2\log 5 \Rightarrow \log x^2=\log 10000-\log 25$

=> $x^2=400$ => x=20.

c) $\frac{\log x}{1-\log 2}=2 \Rightarrow \log x=2-2\log 2 \Rightarrow \log x=\log 100-\log 4$

$\Rightarrow \log x=\log 25 \Rightarrow$ x=25.

12.117.a) Jednačina je definisana ako vrijedi $\frac{x+1}{x}>0\wedge\frac{x}{2-x}>0$, odnosno, 0<x<2. Za vrijednosti varijable x iz ove oblasti je:

$$\log_5\frac{x+1}{x}=\log_5\frac{x}{2-x} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x}=\frac{x}{2-x} \Rightarrow (x+1)(2-x)=x^2$$

=> $2x-x^2+2-x=x^2$ => $2x^2-x-2=0$ $\Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$. Rez.: $x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$.

b) $\log_{\frac{2}{5}}\sqrt{2x-1}=\log_{\frac{2}{5}}(x-2) \Rightarrow \sqrt{2x-1}=x-2 \Rightarrow 2x-1=(x-2)^2$

=> $x^2-6x+5=0$ => x=5. (Drugo rješenje kvadratne jednačine ne pripada domeni date logaritamske jednačine).

c) $\log_{11}(x^2-3)=\log_{11}(3x-5) \Rightarrow (x^2-3)=(3x-5) \Rightarrow x^2-3x+2=0$ => x=2.

12.118.a) $\log_3(x-1)=\log_3\frac{x}{1+x} \Rightarrow x-1=\frac{x}{1+x} \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

b) $\frac{\log(2x-5)}{\log(x^2-8)}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2\log(2x-5)=\log(x^2-8) \Rightarrow (2x-5)^2=x^2-8$

$\Rightarrow 3x^2-20x+33=0 \Rightarrow x_1=3,\ x_2=\frac{11}{3}$.

c) $\frac{\log(x-3)}{\log(x^2-21)}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2\log(x-3)=\log(x^2-21) \Rightarrow 6x=30 \Rightarrow x=5$.

12.119.a) x=1 b) $x=\frac{1}{2}$ **12.120**.a) x=2, x=3 b) x=48 c) x=29

12.121.a) x=6, x=-2 b) x=-1, x=2 c) $x=\pm\frac{1}{2}$

12.122.a) x=3 b) x=3 c) Nema rješenja.

12.123.a) Nema rješenja. b) x=2,5 **12.124**.a) x=3 b) x=3

12.125.a) $\log(\log x)=0$ => logx=1 => x=10.

b) $\log_3(\log x)=1$ => $\log x=3 \Rightarrow x=1000$.

c) $\log_2(\log_3 x)=2$ => $\log_3 x=4 \Rightarrow x=3^4=81$.

12.126.a) $x=10^{10}$ b) x=125 c) x=4

12.127.a) $\log_{\sqrt{2}}\log_2\log_4(x-15)=0 \Rightarrow \log_2\log_4(x-15)=1$

=> $\log_4(x-15)=2$ => $x-15=16 \Rightarrow x=31$.

b) $\log[\log_2\log_3\sqrt{x}+1]=0 \Rightarrow \log_2\log_3\sqrt{x}+1=1$

$\Rightarrow \log_2\log_3\sqrt{x}=0 \Rightarrow \log_3\sqrt{x}=1 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9$.

c) $\log[3+2\log(1+x)]=0 \Rightarrow 3+2\log(1+x)=1$

$\Rightarrow \log(1+x)=-1 \Rightarrow 1+x=10^{-1} \Rightarrow x=\frac{1}{10}-1=-\frac{9}{10}$.

12.128.a) x = 51,5 b) x = 1,1 c) x=2, x=4

12.129.a) Jednačina je definisana ako vrijedi: x+2>0, x≠-1, $3x^2-12>0$, odnosno, x>2. $\log_{x+2}(3x^2-12)=2 \Rightarrow 3x^2-12=(x+2)^2 \Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow x=4$.

b) $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}^2 x-3\log_{\frac{1}{2}} x+5\right)=2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^2 x-3\log_{\frac{1}{2}} x+5=9$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x=t,\ t^2-3t-4=0 \Rightarrow t_1=4, t_2=-1 \Rightarrow x_1=\frac{1}{16}, x_2=2$.

12.130.a) x=100 b) x=100, x=1000 c) x=10, $x=\sqrt{10}$

12.131.a) x=10, x=28,94 b) x=9, $x=-1+\sqrt{10}$

12.132.a) x=2 b) $x=\frac{3}{2}$ **12.133**.a) $x=\frac{60}{59}$ b) x=1, x=5

12.134.a) x=0,99 b) x=5 **12.135**.a) $x=\frac{1}{3}$ b) x=10, x=0,1 c) x=100 , x=0,01

d) $2^{2\log_3 x}\cdot 5^{\log_3 x}=400 \Leftrightarrow 4^{\log_3 x}\cdot 5^{\log_3 x}=400 \Leftrightarrow 20^{\log_3 x}=20^2$

$\Leftrightarrow \log_3 x=2 \Rightarrow x=9$.

12.136.a) $3^{\log_5 x^2}\cdot 2^{\log_5 x}=324 \Leftrightarrow 9^{\log_5 x}\cdot 2^{\log_5 x}=324$

$\Leftrightarrow 18^{\log_5 x}=18^2 \Leftrightarrow \log_5 x=2 \Leftrightarrow x=25$.

b) $9^{\log_7 x}\cdot 2^{2\log_7 x}=36 \Leftrightarrow 9^{\log_7 x}\cdot 4^{\log_7 x}=36 \Leftrightarrow 36^{\log_7 x}=36 \Leftrightarrow \log_7 x=1 \Rightarrow x=7$.

12.137.a) $x^{3-\log\frac{x}{3}}=900 \Leftrightarrow \left(3-\log\frac{x}{3}\right)\log x=\log 900 \Leftrightarrow 3\log x-\log\frac{x}{3}\log x=\log 9+2$

$\Leftrightarrow \log^2 x-(3+\log 3)\log x+2(\log 3+1)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \log x=\frac{3+\log 3\pm\sqrt{(1-\log 3)^2}}{2}$

$\Leftrightarrow \log x=\frac{3+\log 3\pm|1-\log 3|}{2}=\frac{3+\log 3\pm(1-\log 3)}{2}$ => $x_1=100$, $x_2=30$.

b) Uputa: $5^x\cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}}=50$ /:50 $\Leftrightarrow 5^{x-2}\cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}-1}=1 \Leftrightarrow 5^{x-2}\cdot\left(2^{\frac{1}{x+1}}\right)^{x-2}=1$

$\Leftrightarrow \left(5\cdot 2^{\frac{1}{x+1}}\right)^{x-2}=1$ => $x_1=2$, $x_2=-(1+\log_5 2)$. c) $x_1=1$, $x_2=-2(1+\log_3 2)$.

d) $\log_3(3^{x-1}+6)=x \Leftrightarrow 3^{x-1}+6=3^x \Leftrightarrow 3^x-3^{x-1}=6 \Leftrightarrow 3^{x-1}=3 \Leftrightarrow x=2$.

12.138.a) $\log_5(5^{x+1}-20)=x \Leftrightarrow 5^{x+1}-20=5^x \Leftrightarrow 5^{x+1}-5^x=20 \Leftrightarrow 5^x=5 \Rightarrow x=1$.

b) $\log(2^x+x-4)=x(1-\log 5) \Leftrightarrow \log(2^x+x-4)=\log 2^x$

$\Leftrightarrow 2^x+x-4=2^x \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$.

12.139.a) $\log(6\cdot 5^x-25\cdot 20^x)=x+\log 25 \Leftrightarrow \log\frac{(6\cdot 5^x-25\cdot 20^x)}{25}=x$

$\Leftrightarrow \frac{6\cdot 5^x-25\cdot 20^x}{25}=10^x \Leftrightarrow 6\cdot 5^x-25\cdot 20^x=25\cdot 10^x$

$\Leftrightarrow 25\cdot 20^x+25\cdot 10^x-6\cdot 5^x=0 \Leftrightarrow 25\cdot 4^x+25\cdot 2^x-6=0$

$\Leftrightarrow 2^x=t,\ t>0,\ 25t^2+25t-6=0 \Rightarrow t=\frac{1}{5} \Rightarrow 2^x=\frac{1}{5}$

=> xlog2 = -log5 => x = -2,3219. b) x=4

12.140.a) $\log_3(2^x-1)+\log_3(2^x-3)=1 \Leftrightarrow \log_3(2^x-1)(2^x-3)=\log_3 3$

$\Leftrightarrow (2^x-1)(2^x-3)=3 \Leftrightarrow (2^x)^2-4\cdot 2^x=0 \Leftrightarrow 2^x(2^x-4)=0$

$\Leftrightarrow 2^x-4=0 \Leftrightarrow 2^x=4 \Leftrightarrow x=2.$ b) x=1

12.141.a) x=0, x=1 b) x=0, x=1

12.142.a) x=2 b) $x=\log_3 28-3; x=\log_3 10$

12.143.a) x=1, x=2 b) x = 13

12.144.a) $\log_2 x+\log_3 x=1 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_x 2}+\frac{1}{\log_x 3}=1 \Leftrightarrow \frac{\log_x 6}{\log_x 2\log_x 3}=1 \Leftrightarrow \log_x 6=\log_x 2\log_x 3$

$\Leftrightarrow \log_x 6=\log_x 3^{\log_x 2} \Leftrightarrow 6=3^{\log_x 2} \Leftrightarrow \log 6=\log_x 2\cdot\log 3 \Leftrightarrow \log_x 2=\frac{\log 6}{\log 3}$

$\Leftrightarrow \log_x 2=1{,}630929 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x}=1{,}630929 \Leftrightarrow \log_2 x=0{,}613147 \Rightarrow x=1{,}52959.$

b) $\log_2 x+\log_x 2=2 \Leftrightarrow \log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}=2 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2-2\log_2 x+1=0$

=> $\log_2 x=1$ => x=2. c) x=3

12.145.a) $\log_3 x+\log_{27}x+4=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_x 3}+\frac{1}{3\log_x 3}+4=0 \Leftrightarrow 12\log_x 3=-4$

$\Leftrightarrow \log_x 3=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow x^{-\frac{1}{3}}=3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{27}.$ b) x=16 c) x=16

12.146.a) $x=25, x=\sqrt{5}$ b) x=2,155.. c) x=16

12.147.a) Prelaskom na bazu 2, dobivamo:

$\log_{16}x+\log_8 x+\log_2 x=\frac{19}{36} \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 16}+\frac{\log_2 x}{\log_2 8}+\log_2 x=\frac{19}{36}$

$\Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{4}+\frac{\log_2 x}{3}+\log_2 x=\frac{19}{36} \Leftrightarrow 19\log_2 x=\frac{19}{3} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}.$

b) Uputa: Preći na logaritamsku bazu 3. Rezultat: $x=\sqrt{3}$.

12.148.a) Uputa: Sve logaritme izraziti pomoću logaritama po bazi 3:

$\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27}x=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \log_3 x\cdot\frac{\log_3 x}{2}\cdot\frac{\log_3 x}{3}=\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow (\log_3 x)^3=8 \Leftrightarrow \log_3 x=2 \Leftrightarrow x=9.$ b) $x=\frac{1}{4}$ c) $x=\frac{1}{25}$

12.149.a) $x=9, x=\sqrt[3]{9}$ b) $x=\frac{1}{12}$ c) x=1

12.150.a) Prelaskom na logaritamsku bazu 2, dobije se:

$\log_{2x}\frac{1}{2}\cdot\log_{\frac{x}{4}}4-\log_x 2=0 \Leftrightarrow \frac{\log_2\frac{1}{2}}{\log_2 2x}\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2\frac{x}{4}}-\frac{1}{\log_2 x}=0 \Leftrightarrow \frac{-1}{1+\log_2 x}\cdot\frac{2}{\log_2 x-2}-\frac{1}{\log_2 x}=0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x+\log_2 x-2=0 \Leftrightarrow \log_2 x=-2\vee\log_2 x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{4}, x=2.$

b) $x=4,\ x=8$ c) $x=9,\ x=\frac{1}{9}$.

12.151.a) $x=\frac{1}{4}$ b) $x=\frac{1}{25}$ **12.152**.a) x = -4 b) x =16

12.153. $\log_2 x\cdot\log_3 x\cdot\log_5 x=\log_2 x\cdot\log_3 x+\log_2 x\cdot\log_5 x+\log_3 x\cdot\log_5 x$

$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 3\cdot\log_x 5}=\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 3}+\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 5}+\frac{1}{\log_x 3\cdot\log_x 5}$

$1=\log_x 5+\log_x 3+\log_x 2 \Leftrightarrow 1=\log_x 30 \Leftrightarrow x=30.$

Kako je logaritam od 1 nula bez obzira na logaritamsku bazu, iz početne jednačine zaključujemo da je x=1 jedno rješenje date jednačine. Rezultat: x=1, x=30.

12.154.a) $x_1=2, x_2=3, x_3=\frac{1}{10}, x_4=1000$ b) $x_1=\frac{1}{9}, x_2=39$

12.155.a) $x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ b) $x_1=2, x_2=\frac{1}{4}$

12.156.a) x=4, x=8 b) $x_1=1, x_2=5, x_3=\frac{1}{25}$

12.157.a) Za a>0 i a≠1, x=a b) Za a>0 i a≠1, x=a.

12.158.a) *Za* $|a|>0$ *i* $|a|\neq\sqrt{2}$, $x_1=-1, x_2=1$

b) *Za* $a=1$, $x\in(0,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$, *za* $a>0$ *i* $a\neq 1$, $x_1=3^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, x_2=3^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

******

12.159.a) $x_1=\frac{1}{10}, x_2=100$ Uputa: Logaritmirati datu jednačinu uzimajući za bazu broj 10. Tako nastaje jednačina $\log^2 x=2+\log x$, odnosno, $\log^2 x-\log x-2=0$. Smjenom logx=t, dobivamo kvadratnu jednačinu $t^2-t-2=0.\ t_1=-1,\ t_2=2,...$

b) $x_1=\frac{1}{\sqrt{10}}, x_2=10$ c) $x_1=\frac{1}{10000}, x_2=10$

12.160.a) Uputa: Logaritmiranjem jednačine, uzimajući za bazu 10, dobivamo:

(1-logx)logx = -2 ⇔ $\log^2$x-logx+2=0 => $x_1=\frac{1}{10}, x_2=100.$

b) $x_1=0{,}1$; $x_2=1000$ c) $x_1=0{,}01$; $x_2=10$

12.161.a) $x_1=0{,}0001$; $x_2=10$ b) $x_1=0{,}01$; $x_2=100$ c) $x_1=0{,}1$; $x_2=10$

12.162.a) Uputa: Logaritmiranjem jednačine (uzimajući bazu 10) dobijamo jednačinu xlogx=logx , odnosno, (1-x)logx=0, čijim rješavanjem određujemo njeno dvostruko rješenje x=1.

b) Logaritmiranjem jednačine dobivamo:

$$\sqrt{x}\log x=\frac{x}{2}\log x \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}-\sqrt{x}\right)\log x=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}-\sqrt{x}=0 \vee \log x=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=4.$$

c) Zadatak rješavamo kao prethodni a) i b). Rezultat: $x_1=1,\ x_2=\sqrt{27}$.

12.163.a) $x_1=1,\ x_2=9$

b) $x_1=\frac{1}{6},\ x_2=6$. *Uputa*: $6^{\log_6^2 x}=\left(6^{\log_6 x}\right)^{\log_6 x}=x^{\log_6 x}$.

12.164.a) $x=3$ b) x=2. Uputa: Datu jednačinu transformiramo na slijedeći način: $\log_2\frac{4^x+4}{2^{x+1}-3}=x \Leftrightarrow 2^x=\frac{4^x+4}{2^{x+1}-3}$.

Ako uzmemo smjenu $2^x=t$, dobivamo kvadratnu jednačinu $t^2-3t-4=0$.

12.5. Logaritamske nejednačine (nejednadžbe)

12.165.a) $\log_2 x>4 \Leftrightarrow \log_2 x>\log_2 16 \Leftrightarrow x>4$. b) $0<x<256$ c) $x>2^{32}$

12.166.a) $\log_3 x<3 \Leftrightarrow \log_3 x<\log_3 27 \Leftrightarrow 0<x<27$. b) $0<x<3^{81}$ c) $0<x<\sqrt[9]{3}$.

12.167.a) $x>1$ b) $0<x<1$ c) $0<x<1$ **12.168**.a) $x>1$ b) $0<x<1$ c) $0<x<1$

12.169.a) $1<x<18$ b) $x>-1$ c) $-33<x<\frac{1}{3}$.

12.170.a) $x-1>0 \wedge x-1<100 \Rightarrow 1<x<101$. b) $x\in\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ c) $x\in\left(-333,\ \frac{1}{3}\right)$

12.171.a) $x-1>0 \wedge x-1<2 \Rightarrow 1<x<3$.

b) $2x+5>0 \wedge x-3>0 \wedge 2x+5>x-3 \Rightarrow x>3$.

12.172.a) $4-2x>0 \wedge 4-2x<5 \Rightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},2\right)$ b) $3x-2>0 \wedge 3x-2>2 \Rightarrow x>\frac{4}{3}$.

12.173.a) $x\in\left(\frac{5}{2},6\right)$ b) $x\in(9,+\infty)$ **12.174**.a) $x<-1,\ -1<x<1,\ x>4$

b) $\log_{\frac{1}{4}}\left(2x^2+5x+1\right)<0 \Leftrightarrow 2x^2+5x+1>0 \wedge 2x^2+5x+1<1$

$$\Rightarrow x\in\left(-\frac{5}{2},\frac{-5-\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{4},0\right)$$

12.175.a) $x\in\left(-\infty,\frac{-3-\sqrt{21}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{21}-3}{3},+\infty\right)$ b) $x\in(-1,1)\cup(3,5)$

12.176.a) Razlomak je pozitivan ako mu brojnik i nazivnik imaju isti znak (ako su oba pozitivni ili oba negativni). Rezultat: $x\in(0,1)\cup(3,+\infty)$.

b) $x\in(0,1)$ c) $x\in(1,2)\cup(3,+\infty)$

12.177.a) $(x+16>0 \wedge \log_{\frac{2}{7}} x>0) \vee (x+16<0 \wedge \log_{\frac{2}{7}} x<0)$

$\Rightarrow (x>-16 \wedge 0<x<1) \vee (x<-16 \wedge x>1) \Rightarrow 0<x<1$.

b) $\frac{\log_{0.05} x}{x^2+25}>0 \Leftrightarrow \log_{0.05} x>0 \Leftrightarrow 0<x<1$ c) $\frac{\log_{0.04} x}{\log x}>0$

$\Leftrightarrow \left(x>0 \wedge \log_{0.04} x>0 \wedge \log x>0\right) \vee \left(x>0 \wedge \log_{0.04} x<0 \wedge \log x<0\right) \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

12.178.a) $\log_6\frac{x-2}{1-x}<0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{1-x}>0 \wedge \frac{x-2}{1-x}<1 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{3}{2},2\right)$

b) $\log_9\frac{4-x}{2+x}>0 \Leftrightarrow \frac{4-x}{2+x}>0 \wedge \frac{4-x}{2+x}>1 \Leftrightarrow -2<x<1$.

c) $\log_{11}\frac{x^2-2x+1}{x-7}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x-7}>0 \wedge \frac{x^2-2x+1}{x-7}<1 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

12.179.a) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{3x-1}{1-x}<0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{1-x}>0 \wedge \frac{3x-1}{1-x}>1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<1$.

b) $\log_{0.5}\frac{6+x}{1+x}>0 \Leftrightarrow \frac{6+x}{1+x}>0 \wedge \frac{6+x}{1+x}<1 \Leftrightarrow x<-6$.

c) $\log_{0.01}\frac{x^2-1}{x^2-9}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2-9}>0 \wedge \frac{x^2-1}{x^2-9}>1 \Leftrightarrow x<-3 \vee x>3$.

12.180.a) $x\in(-3,-1)\cup(3,+\infty)$ b) $x\in(-10,-4)\cup(6,+\infty)$

c) $x\in\left(-\frac{10}{9},-\frac{4}{5}\right)$

12.181.a) $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup(2,4)$ b) $x\in(1,10)$

12.182.a) $x\in(-311,-11)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$ b) $x\in\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},4\right)$

12.183.a) $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup(2,4]$ b) $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

12.184.a) $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ b) $x\in(-1,1)$ c) $x\in\left(0,10^{-100}\right]\cup\left(10^{-10},+\infty\right)$

12.185.a) $x\in\left(4,1+2\sqrt{3}\right]$ b) $x\in\left(1,\frac{3}{2}\right]$

12.186.a) $x\in(0,2)\cup(3,+\infty)$ b) $x\in(0,1)\cup\left(\frac{4}{3},4\right)$

12.187.a) $x\in\left(2-\sqrt{2},\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{13}{14},2+\sqrt{2}\right)$ b) $x\in[5,+\infty)$

12.188.a) $x\in[2,+\infty)$ b) $x\in(-\infty,-2)$.

12.189.a) $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ b) $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(4,+\infty)$.

12.190.a) $x\in\left(1,\log_2\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ b) $(\log_9 6,\ 1)$

12.191.a) $\left[\log_3\frac{9}{10},\ 2\right)$ b) $1{,}7<x<2$

12.192.a) $x\in(1,+\infty)$ b) $x\in(0,1)\cup(\sqrt{3},9)$

12.193.a) $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup[4,+\infty)$ b) $x\in\left[\log_2\sqrt{7},\ \log_2 3\right]$ c) $x\in(-2,1)$

12.194.a) $x>\frac{3}{2}$ b) $x>2 \wedge x\neq 3$ c) $x>-5$

12.195.a) $x\geq 1$ b) $x\geq 11$ c) $0\leq x\leq 1$

12.196.a) $x\in(0,3)$ b) $x\in[-1,0)\cup(0,2)\cup(2,4]$

12.197.a) $x>1$ b) $x\in\left[-\frac{1}{3},0\right)\cup(0,1]$ **12.198**.a) $x\geq 2$ b) $1\leq x<3$

13. OSNOVI TRIGONOMETRIJE

13.1. Orijentisani ugao (kut). Radijan

13.1.a) $\frac{\pi}{2}$ b) π c) $\frac{3\pi}{2}$ d) 2π **13.2**.a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{12}$

13.3.a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{3}$ **13.4**.a) $x:40^\circ=\pi:180^\circ \Rightarrow x=\frac{2\pi}{9}$ b) $\frac{5\pi}{9}$

c) $\frac{17\pi}{45}$ d) $\frac{14\pi}{45}$ **13.5**.a) 180° b) 360° c) 720° d) -360°

13.6.a) 90° b) 60° c) 45° d) 30° **13.7** a) 120° b) 150° c) 300° d) 450°

13.8.a) 210° b) 135° c) 330° d) 225°

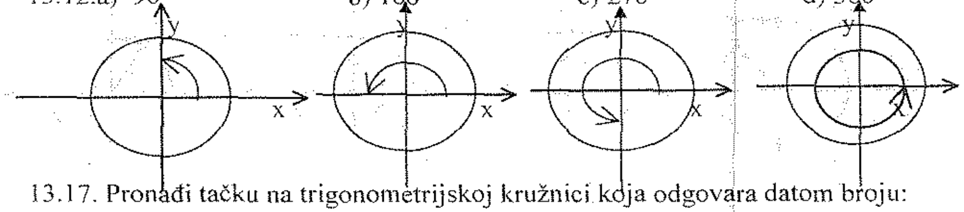
13.9.a) $x:1=180:\pi \Rightarrow x=180:\pi \Rightarrow x=57{,}2957795^\circ = 57^\circ 17' 44{,}8''$.
b) 171°53'14" c) 286°28'44" d) 630°15'13"

13.10.a) -229°10'59" b) -114°35'30" c) -1031°19'27" d) -14495°49'56"

13.11. 108°

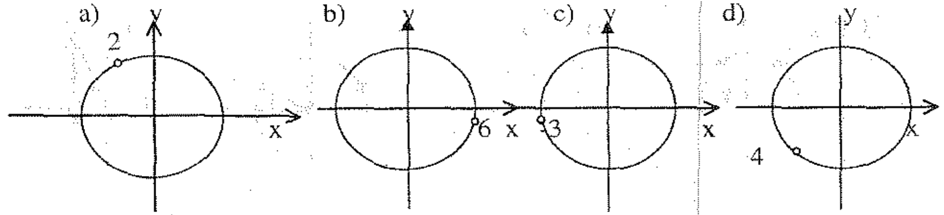
13.2. Trigonometrijska kružnica i predstavljanje uglova (kutova) u kružnici

13.12.a) 90° b) 180° c) 270° d) 360°



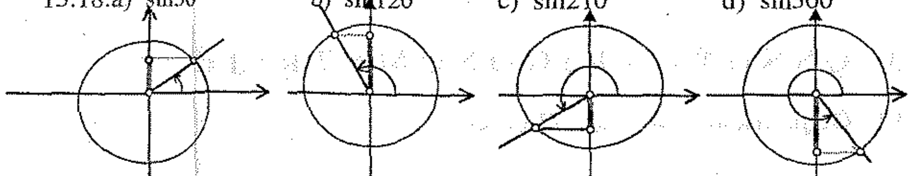
13.17. Pronađi tačku na trigonometrijskoj kružnici koja odgovara datom broju:

a) b) c) d)

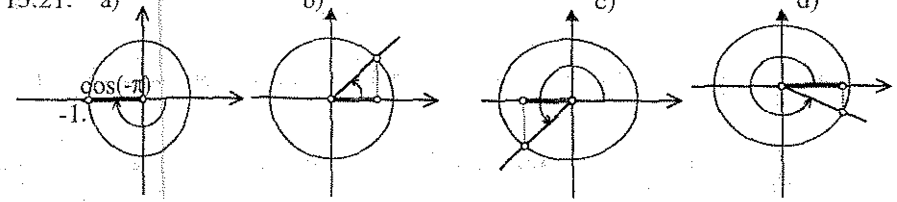


13.3. Definicije trigonometrijskih funkcija na trigonometrijskoj kružnici

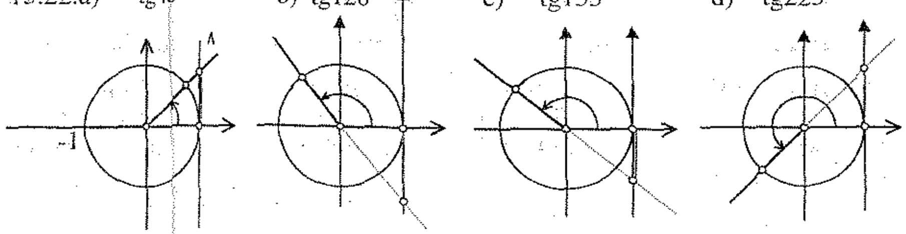
13.18.a) sin30° b) sin120° c) sin210° d) sin300°



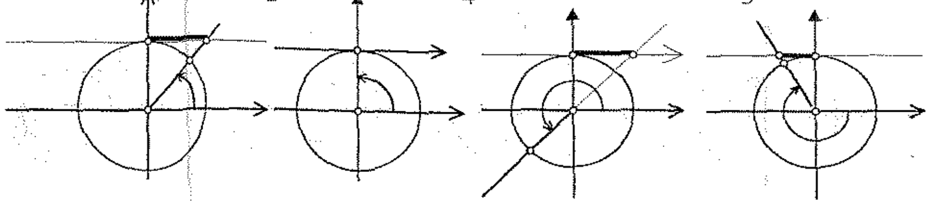
13.21. a) b) c) d)



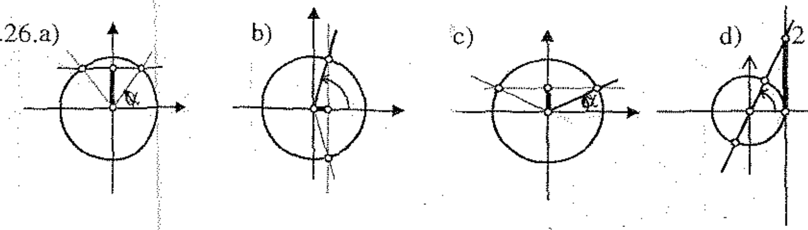
13.22.a) tg45° b) tg120° c) tg135° d) tg225°



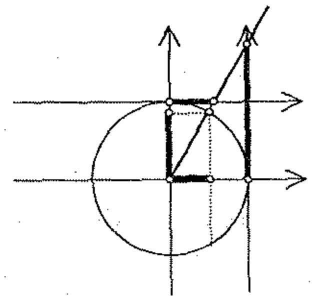
13.25.a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{5\pi}{4}$ d) $-\frac{4\pi}{3}$



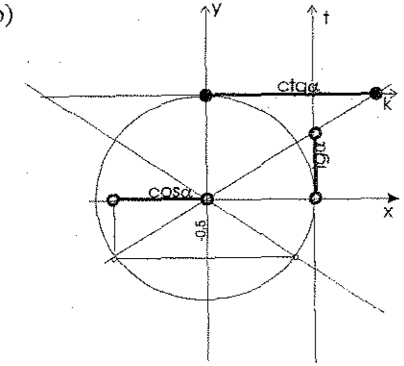
3.26.a) b) c) d) 2



13.27.a)



b)

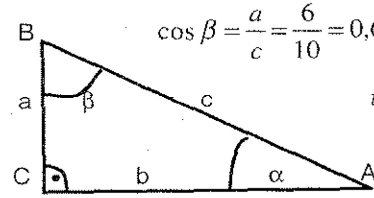


13.29.a) Drugom b) Četvrtom c) Četvrtom d) Trećem e) Trećem.
13.30.a) 3 b) 2 **13.31**.a) 9 b) 1 **13.32**.a) -5 b) -3

13.4. Definicije trigonometrijskih funkcija oštrog ugla u pravouglom trouglu

13.33. $c^2=a^2+b^2$, c=10, $\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{6}{10}=0{,}6$, $\sin\beta=\frac{8}{10}=0{,}8$; $\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{8}{10}=0{,}8$

$\cos\beta=\frac{a}{c}=\frac{6}{10}=0{,}6$, $tg\alpha=\frac{a}{b}=\frac{6}{8}=0{,}75$, $ctg\alpha=\frac{b}{a}=\frac{8}{6}\approx 1{,}33$



$tg\beta=\frac{b}{a}=\frac{8}{6}\approx 1{,}33$, $ctg\beta=\frac{a}{b}=\frac{6}{8}=0{,}75$

13.34.a) b=3, sinα=0,8; cosα=0,6; tgα=$\frac{4}{3}$; ctgα=0,75; sinβ=0,6; cosβ=0,8
tgβ=0,75 b) $a=12$, $\sin\alpha=0{,}8$, $\sin\beta=0{,}6$

13.35.a) Treba konstruirati pravougli trougao čija je kateta a=4 i hipotenuza c=5.
b) Konstruiraj pravougli trougao čija je kateta b=2 i hipotenuza c=3.
c) Konstruiraj pravougli trougao čije su katete a=3 i b=7.
d) Konstruiraj pravougli trougao čije su katete a=6 i b=11.

13.36.a) 1 b) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$ d) $\frac{2\sqrt{3}+1}{2}$ **13.37**.a) $\frac{-3-\sqrt{3}}{3}$ b) $\sqrt{3}+1$

13.38. $\frac{5}{4}$ **13.39**.a) 3 b) $2\sqrt{2}-1$

13.40.a) $\frac{12-\sqrt{3}}{6}$ b) $4+\sqrt{3}$ **13.41**.a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{3}{5}$

13.42.a) $\frac{5}{7}$ b) $-\frac{96}{9}$ c) $\frac{1}{9}$

13.43.a) $\sin 44^\circ = 0{,}6946583$, $\cos 44^\circ = 0{,}7193398$, $tg 44^\circ = 0{,}96568877$, $ctg 44^\circ = 1{,}0355303$,

b) $\sin 53^\circ = 0{,}7986355$, $\cos 53^\circ = 0{,}601815$, $tg 53^\circ = 1{,}3270448$, $ctg 53^\circ = 0{,}753554$

c) $\sin 27^\circ = 0{,}45399$, $\cos 27^\circ = 0{,}891006$, $tg 27^\circ = 0{,}5095254$, $ctg 27^\circ = 1{,}9626122$

d) $\sin 42{,}34^\circ = 0{,}6735287$, $\cos 42{,}34^\circ = 0{,}739161$, $tg 42{,}34^\circ = 0{,}9112069$

e) $\sin 1457^\circ = 0{,}292371$, $\cos 1457^\circ = 0{,}956304$, $tg 1457^\circ = 0{,}30573068$

13.44. Odrediti vrijednosti trigonometrijskih funkcija datih uglova:

a) $\sin 42 = -0{,}9165215$, $\cos 42 = -0{,}399985$, $tg 42 = 2{,}2913879$, $ctg 42 = 0{,}4364167$

b) $\sin 15 = 0{,}650287$, $\cos 15 = -0{,}759687$, $tg 15 = -0{,}855993$, $ctg 15 = -1{,}168233$

c) $\sin 32 = 0{,}5514266$, $\cos 32 = 0{,}834223$, $tg 32 = 0{,}661006$, $ctg 32 = 1{,}5128455$

d) $\sin(-12) = 0{,}5365729$, $\cos(-12) = 0{,}8438539$, $tg(-12) = 0{,}6358599$, $ctg(-12) = 1{,}5726734$

e) $\sin(-676{,}47) = 0{,}85605$, $\cos(-676{,}47) = -0{,}516892$, $tg(-676{,}47) = -1{,}6561479$

13.45.a) $x = 48^0 38''$ b) $x = 16^0\, 58'46''$ c) $x = 13^0\, 12'6''$ d) $x = 11^0\, 18'36''$

13.46.a) $x = 71^0\, 15'45''$ b) $x = 82^0\, 52'37''$ c) $x = 85^0 27'18''$ d) $x = -4^0\, 34'26''$

13.47.a) $x = 0{,}5685016$ b) $x = 2{,}183156$ c) $x = 1{,}2627566$ d) $x = 1{,}054995$

13.48.a) $x = -1{,}075862$ b) $x = 1{,}0701416$ c) $x = -1{,}2627566$ d) $x = 0{,}0906588$

13.5. Osnovni trigonometrijski identiteti

13.49. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Kako je α u četvrtom kvadrantu, a tamo je kosinus pozitivan, ispred korijena treba uzeti znak plus.

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{169-144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}. \qquad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{12}{5}.$$

13.50. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow$

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{25-16}{25}} = -\frac{3}{5}.$$

13.51. $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{144}{169}} = -\sqrt{\frac{169-144}{169}} = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}.$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{12}{5}, \qquad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = -\frac{5}{12}.$$

13.52. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{7}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{121-49}{121}} = \sqrt{\frac{72}{121}} = \frac{6\sqrt{2}}{11},$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{7\sqrt{2}}{12}.$$

13.53. $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{3}$, $\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

13.54. $tg\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

13.55.a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $tg\alpha = \frac{3}{4}$, $ctg\alpha = \frac{4}{3}$ b) $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $tg\alpha = \frac{9}{40}$, $ctg\alpha = \frac{40}{9}$

c) $tg\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{3}{4}$, $\cos\alpha = \frac{7}{4\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ d) $ctg\alpha = \frac{3}{4}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

13.56.
$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{tg\alpha+1}{1-tg\alpha} = \frac{-2+1}{1-(-2)} = -\frac{1}{3}.$$

13.57. $\frac{8}{17}$ **13.58.** $\frac{12}{25}$

13.59. $tg\alpha + ctg\alpha = 3 \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 3 \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = 3 \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{3}.$

$$tg^2\alpha - \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} + ctg^2\alpha = tg^2\alpha - 3 + ctg^2\alpha = \frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} - 3 =$$

$$= \frac{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} - 3 = 9(1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = 9\left(1-2\cdot\frac{1}{9}\right) - 3 = 4.$$

13.60.a) $tg^2\alpha + ctg^2\alpha = (tg\alpha + ctg\alpha)^2 - 2tg\alpha ctg\alpha = 25 - 2 = 23.$

b) $tg^3\alpha + ctg^3\alpha = (tg\alpha + ctg\alpha)(tg^2\alpha - tg\alpha ctg\alpha + ctg^2\alpha) = 5(25-3) = 110.$

13.61. $\frac{7}{18}$ **13.62.** $-\frac{5}{13}$ **13.63.**a) $\sin^2 x$ b) $\sin x$ c) $-\cos^2 x$ d) $2\cos^2 x$

13.64.a) $3\cos^2 x - 3 = -3(1-\cos^2 x) = -3\sin^2 x$ b) $2\sin^2 x$ c) 0

d) $3 - \sin^2 x - \cos^2 x = 3 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 3 - 1 = 2$

13.65.a) $2\cos^2\alpha$ b) $2\cos\alpha$ c) $\cos^2\alpha$

13.66.a) $\sin^4 x - \cos^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x = -\sin^2 x(1-\sin^2 x) + \cos^2 x(1-\cos^2 x) =$

$$= -\sin^2 x\cos^2 x + \sin^2 x\cos^2 x = 0$$

b) $\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1.$

c) $1 - \cos^2 x + tg^2 x\cos^2 x = \sin^2 x + \sin^2 x = 2\sin^2 x.$

13.67.a) $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha - 1} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha-1} = \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{-(1-\cos\alpha)} = -1-\cos\alpha.$

b) $\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=1.$

c) $\dfrac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot\dfrac{ctg^2\alpha-1}{ctg\alpha}=\dfrac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{tg^2\alpha}-1}{\dfrac{1}{tg\alpha}}=\dfrac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot\dfrac{1-tg^2\alpha}{tg\alpha}=1$

d) $\dfrac{2\sin^2\alpha-1}{1-2\cos^2\alpha}=\dfrac{2(1-\cos^2\alpha)-1}{1-2\cos^2\alpha}=\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha}=1.$

13.68.a) sinx – cosx b) 1 c) 1 d) cosx

13.69.a) $\dfrac{1+\cos x}{\sin^2x}:\left[1+\left(\dfrac{1+\cos x}{\sin x}\right)^2\right]=\dfrac{1+\cos x}{\sin^2x}:\left[1+\dfrac{1+2\cos x+\cos^2x}{\sin^2x}\right]=$

$=\dfrac{1+\cos x}{\sin^2x}:\dfrac{\sin^2x+1+2\cos x+\cos^2x}{\sin^2x}=\dfrac{1+\cos x}{\sin^2x}:\dfrac{2+2\cos x}{\sin^2x}=\dfrac{1+\cos x}{\sin^2x}:\dfrac{2(1+\cos x)}{\sin^2x}=\dfrac{1}{2}.$

b) 2 c) $\dfrac{1}{\sin x}$ d) $\dfrac{1}{\cos x}$

13.70.a) $\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}+\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\sqrt{\dfrac{(1+\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}+\sqrt{\dfrac{(1-\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}=$

$=\sqrt{\dfrac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2x}}+\sqrt{\dfrac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2x}}=\sqrt{\dfrac{(1+\sin x)^2}{\cos^2x}}+\sqrt{\dfrac{(1-\sin x)^2}{\cos^2x}}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}+\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=\dfrac{2}{\cos x}$

b) $\dfrac{1}{\sin x}$ c) 2tgx ctgx=2.

13.71. $\cos^2x=1-\sin^2x=1-\left(\dfrac{\sqrt{1+m}-\sqrt{1-m}}{2}\right)^2=...=\dfrac{1+\sqrt{1-m^2}}{2}.$

$\cos x=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-m^2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{1-m^2}}}{2}=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{1-m}+\sqrt{1-m}\right)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{1-m}+\sqrt{1-m}}{2}$

$\sin x\cos x=\dfrac{\sqrt{1+m}-\sqrt{1-m}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{1+m}+\sqrt{1-m}}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{1+m}\right)^2-\left(\sqrt{1-m}\right)^2}{4}=\dfrac{1+m-(1-m)}{4}=\dfrac{m}{2}$

13.72.a) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\dfrac{2}{tg\alpha+ctg\alpha}-1=1+2\sin\alpha\cos\alpha-\dfrac{2}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}-1=$

$=2\sin\alpha\cos\alpha-\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=2\sin\alpha\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=0.$ b) $\dfrac{2\sqrt{1+|\cos\alpha|}}{|\cos\alpha|}$

13.73.a) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

b) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1^2=1.$

13.74.a) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha.$

b) $(1+tg^2\alpha)\cos^2\alpha=\left(1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cos^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$

13.75.a) $(1-\cos^2\alpha)(1+tg^2\alpha)=(1-\cos^2\alpha)\left(1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)=\sin^2\alpha\cdot\left(\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)=$

$=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=tg^2\alpha.$ b) $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha ctg^2\alpha=\cos^2\alpha(1+ctg^2\alpha)=$

$=\cos^2\alpha\cdot\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=ctg^2\alpha.$

13.76.a) $\dfrac{\cos^2x-1}{\sin^2x-1}=\dfrac{1-\sin^2x-1}{1-\cos^2x-1}=\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}=tg^2x.$

b) $\dfrac{5\cos x-4}{3-5\sin x}-\dfrac{3+5\sin x}{4+5\cos x}=\dfrac{20\cos x+25\cos^2x-16-20\cos x-9-15\sin x+15\sin x+25\sin^2x}{12+15\cos x-20\sin x-25\sin x\cos x}$

$=\dfrac{25-16-9}{12+15\cos x-20\sin x-25\sin x\cos x}=0.$

c) $\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{1}{tg^2x}=\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}=\dfrac{1-\cos^2x}{\sin^2x}=1$

d) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=\dfrac{(1-\sin x)\cos x}{\cos^2x}=\dfrac{(1-\sin x)\cos x}{1-\sin^2x}=\dfrac{(1-\sin x)\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}.$

13.77.a) $\dfrac{1-2\sin^2x}{2\cos^2x-1}=\dfrac{\sin^2x+\cos^2x-2\sin^2x}{2\cos^2x-(\cos^2x+\sin^2x)}=\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x-\sin^2x}=1.$

13.78.a) $\dfrac{\sin x}{1+ctgx}+\dfrac{\cos x}{1+tgx}=\dfrac{\sin x}{1+\dfrac{\cos x}{\sin x}}+\dfrac{\cos x}{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\dfrac{\sin^2x}{\sin x+\cos x}+\dfrac{\cos^2x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$

b) $\dfrac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin x\cos x}=\dfrac{\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}-\dfrac{\cos^2x}{\cos^2x}}{\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2x}}=\dfrac{tg^2x-1}{tgx}$

13.79.a) $\dfrac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2-1}{tg\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-1}{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\dfrac{\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}=$

$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} = 2ctg^2\frac{x}{2}.$$

b) $\left(\frac{1}{\cos x}-\cos x\right)\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\right)=\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\cdot\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x}{\cos x}\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin x}=\sin x\cos x.$

13.80. $\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{\sin x(\cos x-\sin x)-\cos x(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}=$

$$=\frac{\sin x\cos x-\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{tg^2x+1}{tg^2x-1}$$

13.81. $tg^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=tg^2\alpha\cdot\sin^2\alpha.$

13.82. $\sin x+\cos x=m \Rightarrow (\sin x+\cos x)^2=m^2 \Rightarrow 1+2\sin x\cos x=m^2 \Rightarrow 2\sin x\cos x=m^2-1.$

$\sin^3x+\cos^3x=(\sin x+\cos x)(\sin^2x-\sin x\cos x+\cos^2x)=\frac{m(1-m^2+1)}{2}=\frac{m(2-m^2)}{2}.$

13.83.a) $\frac{m(3-m^2)}{2}$ b) $\frac{1+2m^2-4m^4}{2}$

13.84. $3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=$

$=3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\alpha+\cos^4\alpha)=$

$=3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\alpha+\cos^4\alpha)=$

$=3\sin^4\alpha+3\cos^4\alpha-2\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-2\cos^4\alpha=$

$=\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1$

13.85 $\sin^3\alpha(1+ctg\alpha)+\cos^3\alpha(1+tg\alpha)=\sin^3\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+\cos^3\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=$

$=\sin^3\alpha+\sin^2\alpha\cos\alpha+\cos^3\alpha+\cos^2\alpha\sin\alpha=$

$=\sin^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^2\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)=$

$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha.$

13.86. $\sin\frac{2\pi}{15}=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{15}\right)=2\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{15}=\frac{\sin\frac{2\pi}{15}}{2\sin\frac{\pi}{15}}.$

$\sin\frac{4\pi}{15}=\sin\left(2\cdot\frac{2\pi}{15}\right)=2\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15} \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{15}=\frac{\sin\frac{4\pi}{15}}{2\sin\frac{2\pi}{15}}$

Analogno se dobije:

$$\cos\frac{4\pi}{15}=\frac{\sin\frac{8\pi}{15}}{2\sin\frac{4\pi}{15}}, \quad \cos\frac{8\pi}{15}=\frac{\sin\frac{16\pi}{15}}{2\sin\frac{8\pi}{15}}=\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{15}\right)}{2\sin\frac{8\pi}{15}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{15}}{2\sin\frac{8\pi}{15}}.$$

$$\cos\frac{8\pi}{15}=\frac{-\sin\frac{\pi}{15}}{2\sin\frac{8\pi}{15}} \Rightarrow \cos\left(\pi-\frac{7\pi}{15}\right)=\frac{-\sin\frac{\pi}{15}}{2\sin\frac{8\pi}{15}} \Rightarrow \cos\frac{7\pi}{15}=\frac{\sin\frac{\pi}{15}}{2\sin\frac{8\pi}{15}}.$$

Zamjenom dobivenih vrijednosti na lijevoj strani jednakosti koju dokazujemo i sređivanjem dolazimo do vrijednosti $\frac{1}{2^7}$.

13.6. Periodičnost trigonometrijskih funkcija

13.87.a) 2π b) 2π c) 2π d) 2π **13.88.**a) 2π b) 2π c) 2π d) 2π

13.89.a) $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ b) 2π c) π d) $\frac{\pi}{2}$

13.90.a) 2π b) $\frac{\pi}{4}$ c) $T=\frac{\pi}{\frac{3}{4}}=\frac{4\pi}{3}$

13.91. $f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=9\sin3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=9\sin(3x+\pi)=-9\sin3x$, pa $\frac{\pi}{3}$ nije period date funkcije.

13.92.a) $\sin390° = \sin(360°+30°)=\sin30°=0{,}5$ b) $tg765°=tg(4\cdot180°+45°)=tg45°=1$

c) $\cos405° = \cos(360°+45°) = \cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $ctg750° = ctg(720°+30°) = ctg30° = \sqrt{3}$.

13.93.a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2 **13.94.**a). -8 b) 3

13.95.a) $\sin1130°=\sin(3\cdot360°+50°)=\sin50°$ b) $\cos800°=\cos(720°+80°)=\cos80°$

c) $tg1510°=tg(8\cdot180°+70°)=tg70°$ d) $ctg2405°=ctg(13\cdot180°+65°)$

13.96.a) $\sin\frac{7\pi}{3}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos\frac{19\pi}{3}=\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

c) $tg\frac{25\pi}{6}=tg\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $ctg\frac{199\pi}{7}=ctg\left(28\pi+\frac{\pi}{7}\right)=ctg\frac{\pi}{7}$.

13.97.a) $2\sin\frac{13\pi}{6}+4\cos\frac{17\pi}{6}=2\sin\frac{\pi}{6}+4\cos\frac{5\pi}{6}=1+2\sqrt{3}$ b) $\frac{-1-4\sqrt{3}}{2}$ c) 0

13.98.a) $\frac{\pi}{2}$ b) Funkcija je uvijek pozitivna! $T=\frac{2\pi}{3}$. c) π

13.99.a) Period funkcije $y=\sin\sqrt{2}x$ je $P_1=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$, a period funkcije $y=\cos\sqrt{3}x$ je $P_2=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Ako bi data funkcija bila periodična sa periodom P, tada bi se periodi P_1 i P_2 morali sadržavati u periodu P, tj. vrijedilo bi $\frac{P}{P_1}=m$, $\frac{P}{P_2}=k$, pri čemu su m i k prirodni brojevi. Kako je odnos dva prirodna broja uvijek racionalan, a u ovom slučaju je $m:k=\sqrt{2}:\sqrt{3}$, to posmatrana funkcija nije periodična.

b) Funkcija $y=\cos\sqrt{3}x-tg\sqrt{5}x$ nije periodična.

13.100.*Kako data jednakost vrijedi za svaku vrijednost od x, ona vrijedi i za

x=x+c $$f(x+2c)=f[(x+c)+c]=\frac{1-f(x+c)}{1+f(x+c)}=\frac{1-\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}=f(x).$$

Kako je f(x+2c)=f(x), za svaku vrijednost varijable x, to je funkcija y=f(x) periodična sa periodom 2c.

13.7. Trigonometrijske funkcije negativnog argumenta. Parne i neparne trigonometrijske funkcije

13.101.a) f(-x)=2sin(-x)=-2sinx=-f(x), funkcija je neparna.
b) f(-x)=-3sin(-x)=3sinx=-f(x), funkcija je neparna
c) f(-x)=4cos2(-x)=4cos(-2x)=4cos2x=f(x), funkcija je parna
d) f(-x)=-8cos(-x)=-8cosx=f(x), funkcija je parna.
13.102.a) Neparna b) Neparna c) Neparna d) Nije ni parna ni neparna.
13.103.a) f(-x)=3-(-x)ctg(-x)=3-xctgx=f(x), funkcija je parna.
b) Funkcija nije ni parna ni neparna
c) Funkcija nije ni parna ni neparna d) Funkcija nije ni parna ni neparna.

13.104.a) $f(-x)=\frac{(-x)^3-\sin(-x)}{-x-\sin 3(-x)}=\frac{-x^3+\sin 3x}{-x+\sin 3x}=\frac{x^3-\sin 3x}{x-\sin 3x}=f(x)$, što znači da je funkcija parna. b) Funkcija je parna. c) Funkcija je parna.

13.105.a) $f(-x)=(-x)^3-tg^3 3(-x)\sin^3 2(-x)=$
$=-x^3-tg^3(-3x)\sin^3(-2x)=-x^3-tg^3 3x\sin^3 2x=-(x^3+tg^3 3x\sin^3 2x\neq -f(x)$.
Funkcija nije ni parna ni neparna. b) Funkcija je neparna. c) Funkcija je parna.
13.106.*a) Funkcija je parna. b) Funkcija nije ni parna ni neparna.

13.8. Znaci trigonometrijskih funkcija

13.107. Sinus i kosinus imaju negativne vrijednosti samo ako je drugi krak ugla u trećem kvadrantu.
13.108. U četvrtom. **13.109**. U drugom.
13.110.a) $\sin125^0>0$ b) $\sin320^0<0$ c) $\cos116^0<0$ d) $\cos250^0<0$.
13.111.a) $tg265^0+5>0$ b) $ctg573^0>9$ c) $\cos(-226^0)<0$ d) $\sin(-270^0)>0$
13.112.a) $\sin72^0\cos100^0<0$ b) $tg200^0\sin350^0<0$ c) $\cos(-95^0)ctg(-100^0)<0$

13.113.a) $\sin77^0-\sin25^0>0$ b) $\cos67^0-\cos80^0>0$ c) $tg73^0-tg54^0>0$ d) $ctg12^0-ctg86^0$
13.114.a) Funkcija je pozitivna u onim intervalima u kojima sinus i kosinus imaju isti znak: $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, i negativna tamo gdje su sinus i kosinus suprotnih znakova: $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$.

b) U intervalima $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$ funkcija je pozitivna.

c) U intervalima $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, funkcija je pozitivna.

d) Funkcija je uvijek pozitivna osim za sinx=1, kada je vrijednost funkcije 0.

13.115.a) U intervalima koji odgovaraju trećem i četvrtom kvadrantu
b) $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ c) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ d) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

13.116.a) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ b) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ c) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ d) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

13.117.a) $x\in[0,\pi]$ b) $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ c) $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

13.9. Svođenje na prvi kvadrant

13.118.a) cos67° b) cos24° c) ctg47° d) ctg76°
13.119.a) sin73° b) sin39° c) tg66° d) tg18°
13.120.a) sin120° = sin(180°-60°) = sin60° = 0,86603
b) cos150° = cos(180°-30°) = -cos30° = 0,86603
c) sin135° = sin(180°-45°) = sin45° = 0,70711
d) cos120°= cos(180°-60°) = -cos60° = -0,5
13.121.a) tg120°=tg(180°-60°)=-tg60°=$-\sqrt{3}$. b) ctg135°=tg(180°-45°)= -tg45°=-1.
c) tg135° = tg(180°-45°) = -tg45° = -1
d) ctg150° = ctg(180°-30°) = -ctg30° = $-\sqrt{3}$.

13.122.a) $\cos 210° = \cos(180°+30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

b) $\sin 240° = \sin(180°+60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $ctg 225^0 = ctg(180^0 + 45^0) = ctg 45^0 = 1$

d) $\sin 210° = \sin(180°+30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$.

1.123.a) $\sin 225° = \sin(180°+45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

b) $\cos 225° = \cos(180°+45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

c) $tg 240° = tg(180°+60°) = tg 60° = \sqrt{3}$.

d) $ctg 240° = ctg(180°+60°) = ctg 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

13.124.a) $\sin 315° = \sin(360°-45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\cos 300° = \cos(360°-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

c) $tg 300° = -tg 60° = \sqrt{3}$. d) $ctg 330° = -ctg 30° = -\sqrt{3}$.

13.125.a) $\sin 480° = \sin(360°+120°) = \sin 120° = \sin(180°-60°) = \sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\sin 825° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sin 1230° = \sin(3\cdot 360°+150°) = \sin 150° = \sin 30°$.

d) $\sin 960° = \sin 240° = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13.126.a) $\sin 1290° = \sin 210° = -\sin 30° = -0{,}5$ b) $\cos 570° = \cos 210° = -\cos 30° = -0{,}86603$

c) $\cos 1230° = \cos 150° = -\cos 30° = -0{,}86603$ d) $tg 960° = tgtg 60° = 1{,}73205$

13.127.a) $\cos 480° = \cos 120° = -\cos 60° = -0{,}5$ b) $ctg 855° = ctg 135° = -1$

c) $tg 1230° = tg 150° = -tg 30° = -0{,}57735$ d) $\cos 945° = tg 225° = tg 45° = 1$.

13.128.a) $\sin 55° = \sin(90°-35°) = \cos 35°$ b) $\sin 114° = \sin(90°+24°) = \cos 24°$

c) $\sin 160° = \sin(180°-20°) = \sin 20°$ d) $\sin 325° = \sin(360°-35°) = -\sin 35°$

13.129.a) $\cos 87° = \sin 3°$ b) $\cos 215° = -\cos 35°$

c) $\cos 111° = -\sin 21°$ d) $\cos 400° = \cos 40°$

13.130.a) $tg 187° = tg 7°$ b) $tg 280° = tg 100° = -tg 80° = -ctg 10°$

c) $ctg 451° = ctg 91° = -ctg 89° = -tg 1°$ d) $ctg 600° = ctg 60° = tg 30°$

13.131.a) $\sin 11\pi = \sin(10\pi+\pi) = \sin\pi$ b) $\cos 23\pi = (\cos 22\pi+\pi) = \cos\pi$

c) $\sin 8\pi = \cos 2\pi$ d) $tg 33{,}1\pi = tg(33\pi+0{,}1\pi) = tg 0{,}1\pi$

13.132.a) $\cos 660° = \cos 60° = 0{,}5$ b) $\sin 870° = \sin 30° = 0{,}5$

c) $ctg 930° = ctg 30° = 1{,}732$ d) $tg 585° = tg 45 = 1$

13.133.a) 5 b) 3 **13.134**.a) -0,5 b) 0

13.135.a) $\sin\frac{49\pi}{18} = \sin\left(\frac{36\pi}{18}+\frac{13\pi}{18}\right) = \sin\left(2\pi+\frac{13\pi}{18}\right) = \sin\frac{13\pi}{18} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{9}\right) = \cos\frac{2\pi}{9}$

b) $\cos\frac{35\pi}{13} = \cos\left(2\pi+\frac{9\pi}{13}\right) = \cos\frac{9\pi}{13} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{26}\right) = -\sin\frac{5\pi}{26}$.

c) $tg\left(-\frac{29\pi}{7}\right) = -tg\left(4\pi+\frac{\pi}{7}\right) = -tg\frac{\pi}{7}$.

13.136.a)* $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\alpha-3\pi)ctg\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha\cos\alpha\, tg\alpha = -\sin\alpha\cos\alpha$.

b) $\sin(\alpha-17\pi)\cos(\pi+\alpha)tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha\cos\alpha\, ctg\alpha = \cos^2\alpha$.

13.137. $\sin 825°\cos(-15°)+\cos 75°\sin(-555°)+tg 155° tg 245° =$
$= \cos 15°\cos 15°+\sin 15°\sin 15°-tg 25° tg 65° =$
$= \cos^2 15°+\sin^2 15°-tg 25° ctg 25° = 1-1 = 0.$

13.138. $\frac{\cos^2 696^0 + tg(-260^0)tg 530^0 - \cos^2 156^0}{tg^2 252^0 + ctg^2 342^0} = \frac{\cos^2 24^0 + tg 80^0 tg 10^0 - \cos^2 24^0}{tg^2 72^0 + ctg^2 18^0} =$

$= \frac{tg 80^0 tg 10^0}{ctg^2 18^0 + ctg^2 18^0} = \frac{ctg 10^0 tg 10^0}{2ctg^2 18^0} = \frac{1}{2ctg^2 18^0} = \frac{1}{2}tg^2 18^0$.

13.139. $\frac{\sin(-328^0)\sin 958^0}{ctg 572^0} - \frac{\cos(-508^0)\cos(-1022^0)}{tg(-212^0)} =$

$= \frac{-\sin 32^0 \sin 58^0}{ctg 32^0} - \frac{-\cos 32^0 \cos 58^0}{-tg 32^0} = \frac{-\sin 32^0 \cos 32^0}{ctg 32^0} - \frac{\cos 32^0 \sin 58^0}{tg 32^0} =$

$= -\sin^2 32^0 - \cos^2 32^0 = -(\sin^2 32^0 + \cos^2 32^0) = -1$.

13.140.* $\sin 395^0 \sin 145^0 - \cos(-505^0)\cos 755^0 - tg(-616^0)tg 194^0 =$
$= \sin 35^0 \sin 35^0 + \cos 35^0 \cos 35^0 + tg 76^0 tg 14^0 =$
$= \sin^2 35^0 + \cos^2 35^0 + ctg 14^0 tg 14^0 = 1 + 1 = 2.$

13.10. Adicione teoreme (formule)

13.141.a) $\sin 28°\cos 2°+\cos 28°\sin 2° = \sin(28°+2°) = \sin 30° = 0{,}5$

b) $\sin 33°\cos 27°+\cos 33°\sin 27° = \sin(33°+27°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866025$

13.142.a) $\sin 35°\cos 10°+\cos 35°\sin 10° = \sin(35°+10°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707106$

b) $\sin 85°\cos 15° - \cos 85°\sin 15° = \sin(85°-15°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866025$

13.143.a) $\cos 53°\cos 37° - \sin 53°\sin 37° = \cos(53°+37°) = 90° = 0$

b) $\cos 28^\circ \cos 32^\circ - \sin 28^\circ \sin 32^\circ = \cos(28^\circ+32^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0{,}5$

14.144.a) $\cos 41^\circ \cos 11^\circ + \sin 41^\circ \sin 11^\circ = \cos(41^\circ - 11^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866025$

b) $\cos 78^\circ \cos 33^\circ + \sin 78^\circ \sin 33^\circ = \cos(78^\circ - 33^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707106.$

13.145.a) $\frac{tg24^0 + tg21^0}{1 - tg24^0 tg21^0} = tg(24^0+21^0) = tg45^0 = 1.$

b) $\frac{tg34^0 + tg26^0}{1 - tg34^0 tg26^0} = tg(34^0+26^0) = tg60^0 = \sqrt{3}.$

c) $\frac{tg124^0 + tg56^0}{1 - tg124^0 tg56^0} = tg(124^0+56^0) = tg180^0 = 0.$

13.146.a) $\ldots = tg45^0 = 1$ b) $\ldots = tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\ldots = tg60^0 = \sqrt{3}$

13.147.a) Prema adicionoj formuli je $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. Potrebno je odrediti $\cos\alpha$ i $\cos\beta$.

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha,\ \cos\alpha = \frac{4}{5},\ \cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\frac{15}{17}.$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}\left(-\frac{15}{17}\right) + \frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17} = -\frac{45}{85} + \frac{32}{85} = -\frac{13}{85}.$

b) $\sin(\alpha-\beta) = -\frac{77}{85}$ c) $\cos(\alpha-\beta) = -\frac{36}{85}$

13.148. $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} = \frac{4+\frac{6}{5}}{1-4\cdot\frac{6}{5}} = \frac{\frac{26}{5}}{-\frac{19}{5}} = -\frac{26}{19};\ tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta} = \frac{4-\frac{6}{5}}{1+4\cdot\frac{6}{5}} = \frac{\frac{14}{5}}{\frac{29}{5}} = \frac{14}{29}$

13.149. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{12}{13} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{12}{13};\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos\beta = \frac{5}{13}.$

$tg\alpha = -\frac{12}{5},\ tg\beta = \frac{12}{5},\ tg(\alpha+\beta) = 0 \ \ i \ \ tg(\alpha-\beta) = \frac{120}{119}.$

13.150. $\sin(30^\circ - \alpha) = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ **13.151.** $\frac{-\sqrt{21}-3}{8}$ **13.152.** $-\frac{1}{7}$

13.153. $\frac{15\sqrt{3}-8}{34}$

13.154.a) $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ+30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$

b) $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ+45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$

c) $tg(-75^0) = -tg(45^0+30^0) = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-3} = -2-\sqrt{3};$

d) $ctg15^0 = ctg(45^0 - 30^0) = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}.$

13.155. $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \quad\Rightarrow\quad \alpha+\beta = 45^0.$

13.156. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{3\sqrt{3}+4}{10}\cdot\frac{4}{5} - \frac{4\sqrt{3}-3}{10}\cdot\frac{3}{5} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \alpha - \beta = 30^0$

13.157. $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4-a} - \frac{a-1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{a\sqrt{3}}{4-a}\cdot\frac{a-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{a^2-2a+4}{(4-a)\sqrt{3}}}{\frac{a^2-2a+4}{4-a}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \ \alpha - \beta = 30^0.$

13.158*. $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = \frac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1 - x\cdot\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\frac{x(1+x)+1-x}{1+x}}{\frac{1+x-x(1-x)}{1+x}} = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$

$\Rightarrow \ \alpha + \beta = 45^0.$

Ako je $x<-1$, tada su α i β negativni oštri uglovi pri čemu je α između -45° i -90°. Kako je $tg(\alpha+\beta)=1$ u svakom slučaju, to zbir $\alpha+\beta$ uglova α i β može biti samo -135° $(-3\pi/4)$.

13.159.a) $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin[(\alpha+\beta)+\gamma] = \sin(\alpha+\beta)\cos\gamma + \cos(\alpha+\beta)\sin\gamma =$

$= \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

b) $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

c) $tg(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma - tg\alpha tg\beta tg\gamma}{1 - tg\alpha tg\beta - tg\alpha tg\gamma - tg\beta tg\gamma}$

13.160 . Prema a) u prethodnom zadatku je
$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$
Izračunavanjem nepoznatih vrijednosti trigonometrijskih funkcija i zamjenom u navedenu formulu, dobivamo: $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3},\ \cos\beta = \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{11}},\ \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}};$

$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=1 \quad \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

13.161.a) 1 b) -2

13.162. $\frac{tg(39^0+\alpha)+tg(6^0-\alpha)}{1-tg(39^0+\alpha)tg(6^0-\alpha)}+\frac{1+ctg(38^0-\beta)tg(7^0+\beta)}{tg(52^0+\beta)-ctg(83^0-\beta)}=$

$=tg(39^0+\alpha+6^0-\alpha)+\frac{1+tg(52^0+\beta)tg(7^0+\beta)}{tg(52^0+\beta)-tg(7^0+\beta)}=tg45^0+\frac{1}{tg[(52^0+\beta)-(7^0+\beta)]}$

$=1+\frac{1}{tg45^0}=1+1=2$

13.163. $\frac{1}{2}$. **13.164.** 1 **13.165.**a) sinα b) cosα c) cos(α-β)

13.166.a) tgαctgβ b) 1 c) tgβ **13.167.**a) cos2β b) 1

13.168.a) sin53°sin67°-cos14°+cos37°cos23° =

= sin53°sin67°-cos14°+(cos37°cos23°- sin37°sin23°)+ sin37°sin23°=

= sin53°sin67°-cos14°+ cos(37°+23°)+ sin37°sin23°=

= cos37°cos23°+sin37°sin23°-cos14°+cos60°=

= cos(37°-23°)-cos14°+cos60°= cos14°-cos14°+cos60°=cos60°=0,5.

b) sin20°+sin13°sin57°-sin33°sin77° = sin20°+sin13°cos33°-cos13°sin33°=

= sin20°+sin(13°-33°) = sin20°+sin(-20°) = sin20°-sin20° = 0.

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 1 **13.169.**a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{2}$

13.170.a) 1 b) 0 c) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$ d) $\ldots=tg45^0=1$.

13.171.a) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ b) 0 c) −tg75°

13.172.a) 1 b) …= tg45°=1 c) $tg\left(\frac{9\pi}{28}-\frac{\pi}{4}\right)=tg\frac{\pi}{14}$.

13.173.a) cos2α- sin2α tgα = cos^{2}α - sin^{2}α - 2sin^{2}α = 1-4sin^{2}α b) 1 c) tgα

13.174.a) 1 b) -tg^{2}α

13.175.a) sin(45°+α) = sin45°cosα+cos45°cosα = cos45°cosα+sin45°sinα =

= cos(45°-α)

13.176.a) sin15°+tg30°cos15° = sin15° + $\frac{\sin 30^0\cos 15^0}{\cos 30^0}=$

$=\frac{\sin 15^0\cos 15^0+\sin 30^0\cos 15^0}{\cos 30^0}=\frac{\sin(15^0+30^0)}{\cos 30^0}=\frac{\sin 45^0}{\cos 30^0}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$

13.177.a) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=$

$=(\sin\alpha\cos\beta)^2-(\cos\alpha\sin\beta)^2=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=$

$=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

13.178.a) $\frac{tg\alpha+ctg\beta}{ctg\beta+tg\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}}{\frac{\cos\beta}{\sin\beta}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}.$

b) $\sin\alpha-\cos\alpha\cdot tg\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)tg\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}tg\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}tg\frac{\alpha}{2}=$

$=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}tg\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}tg\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)=$

$=\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}=tg\frac{\alpha}{2}.$

13.179.a) $tg(\alpha+\beta)-tg\alpha-tg\beta=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta}-tg\alpha-tg\beta=$

$=\frac{tg\alpha+tg\beta-(1-tg\alpha\, tg\beta)(tg\alpha+tg\beta)}{1-tg\alpha\, tg\beta}=\frac{tg\alpha+tg\beta-tg\alpha-tg\beta+tg\alpha\, tg\beta(tg\alpha+tg\beta)}{1-tg\alpha\, tg\beta}=$

$=\frac{tg\alpha\, tg\beta(tg\alpha+tg\beta)}{1-tg\alpha\, tg\beta}=tg\alpha\; tg\beta\; tg(\alpha+\beta).$

13.180.b) $\frac{(1-tg\alpha)\cos(45^0-\alpha)}{1+tg\alpha}=\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}\cdot\cos(45^0-\alpha)=tg(45^0-\alpha)\cos(45^0-\alpha)=$

$=\sin(45^0-\alpha)=\sin[90^0-(45^0+\alpha)]=\cos(45^0+\alpha)$

13.181.b) $(ctg\alpha+ctg\beta)ctg(\alpha+\beta)-(ctg\beta-ctg\alpha)ctg(\alpha-\beta)=$

$=(ctg\alpha+ctg\beta)\cdot\frac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}-(ctg\beta-ctg\alpha)\frac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}=$

$=ctg\,\alpha ctg\,\beta-1-ctg\,\alpha ctg\,\beta-1=-2.$

13.182. $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma\Rightarrow tg(\alpha+\beta)=tg\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$

$\Rightarrow\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=ctg\gamma\Rightarrow\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=\frac{1}{tg\gamma}\Rightarrow(tg\alpha+tg\beta)tg\gamma=1-tg\alpha tg\beta$

$\Rightarrow tg\,\alpha tg\,\gamma+tg\,\beta tg\,\gamma=1-tg\,\alpha tg\,\beta\Rightarrow tg\,\alpha tg\,\beta+tg\,\alpha tg\,\gamma+tg\,\beta tg\,\gamma=1.$

13.183. cos^{2}x+cos^2(x-α)-2cosxcosαcos(x-α) =

= cos^{2}x+(cosxcosα+sinxsinα)^2-2cosxcosα(cosxcosα +sinxsinα) =

= cos^{2}x+cos^{2}xcos^{2}α+2 cosxcosαsinxsinα+sin^{2}xsin^{2}α-2cos^{2}xcos^{2}α

-2cosxcosαsinxsinα =

$= \cos^2x - \cos^2x\cos^2\alpha + \sin^2x\sin^2\alpha = \cos^2x(1-\cos^2\alpha) + \sin^2x\sin^2\alpha =$

$= \cos^2x\sin^2\alpha + \sin^2x\sin^2\alpha = (\cos^2x+\sin^2x)\sin^2\alpha = \sin^2\alpha$.

13.184. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos\gamma(\cos\gamma-2\cos\alpha\cos\beta)=$

$= \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos(\alpha+\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-2\cos\alpha\cos\beta) =$

$= \cos^2\alpha+\cos^2\beta-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) =$

$= \cos^2\alpha+\cos^2\beta-(\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta) =$

$= \cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta =$

$= \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta)+\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta =$

$= (\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\sin^2\beta+\cos^2\beta = \sin^2\beta+\cos^2\beta = 1$.

13.185.* $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$

$= \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2[180^0-(\alpha+\beta)]+2\cos\alpha\cos\beta\cos[180^0-(\alpha+\beta)]=$

$= \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=$

$= \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta) =$

$= \cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta)+\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta =$

$= \cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta = (\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\sin^2\beta+\cos^2\beta = \sin^2\beta+\cos^2\beta=1$.

13.186. $\alpha+\beta = 180^0-\gamma \Rightarrow tg(\alpha+\beta) = tg(180^\circ-\gamma) \Rightarrow \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\ tg\beta} = -tg\gamma$

$\Rightarrow tg\alpha+tg\beta = -tg\gamma(1-tg\alpha\ tg\beta) \Rightarrow tg\alpha+tg\beta+tg\gamma = tg\alpha tg\beta tg\gamma$.

13.187. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\gamma=\frac{3}{5}$.

$\sin(\alpha-\beta+\gamma) = \sin[(\alpha-\beta)+\gamma] = \sin(\alpha-\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)\sin\gamma =$

$= \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma =$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{5}}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{6\sqrt{7}-9\sqrt{5}+4\sqrt{35}+24}{60}$$

13.11. Trigonometrijske funkcije dvostrukog ugla i poluugla

13.188. $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $tg\alpha=\frac{3}{4}$, $ctg\alpha=\frac{4}{3}$, $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}$,

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{7}{25}$, $tg2\alpha=\frac{24}{7}$, $ctg2\alpha=\frac{7}{24}$.

13.189. $\cos\beta=-\frac{5}{13}$, $\sin2\beta=\frac{120}{169}$, $\cos2\beta=-\frac{119}{169}$ **13.190**. $tg\alpha=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

13.191. $\cos^2\beta=\frac{1+\cos2\beta}{2}$, $\sin^2\beta=\frac{1-\cos2\beta}{2}=\frac{1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{2}{3}=\frac{6}{9} \Rightarrow \sin\beta=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $tg\beta=-\sqrt{2}$

13.192. Odrediti $\cos2\alpha$, a zatim $tg2\alpha$, $tg2\alpha=\frac{32}{49}$.

13.193.* $\sin4\alpha = 2\sin2\alpha\cos2\alpha = 2\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}\cdot\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -0{,}96$, $\cos4\alpha = 0{,}28$.

13.194. $\sin\alpha=\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha=\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}},\quad ctg\alpha=\frac{ctg^2\frac{\alpha}{2}-1}{2ctg\frac{\alpha}{2}}$$

13.195. $\sin\alpha=-\frac{240}{289}$, $\cos\alpha=\frac{161}{289}$, $tg\alpha=-\frac{240}{161}$. **13.196**. $\sin\alpha=-\frac{120}{169}$, $\cos\alpha=\frac{119}{169}$.

13.197. $tg\alpha=\sqrt{2}-1$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$,

$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg2\alpha = 1$, $ctg2\alpha = 1$.

13.198. $\sin\alpha=\frac{60}{109}$, $\cos\alpha=\frac{91}{109}$, $tg\alpha=\frac{60}{91}$, $ctg\alpha=\frac{91}{60}$.

13.199. $$\frac{\sin\alpha}{3-2\cos\alpha}=\frac{\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}}{3-2\cdot\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\frac{4}{1+4}}{3-2\cdot\frac{1-4}{1+4}}=\frac{\frac{4}{5}}{3+\frac{6}{5}}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{21}{5}}=\frac{4}{21}.$$

13.200. $\sin2x=\pm\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$, $\cos2x=\frac{a^2-6ab+b^2}{(a+b)^2}$, $tg2x=\pm\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{a^2-6ab+b^2}$

13.201. $\sin x=\pm\frac{1-a^2}{1+a^2}$, $\sin 2x=\pm\frac{4a(1-a^2)}{(1+a^2)^2}$, $\cos 2x=\frac{6a^2-1-a^4}{(1+a^2)^2}$

13.202. $\sin2x=\frac{9}{16}$, $\cos2x=\pm\frac{5\sqrt{7}}{16}$, $tg2x=\pm\frac{9\sqrt{7}}{35}$

13.203. $tg2y=-\frac{4}{3}$, $ctg(2x-2y)=\frac{13}{84}$

13.204. $\sin(2x+y)=\frac{8\sqrt{10}-1}{27}$, $\cos(x-2y)=\frac{14-7\sqrt{5}}{27}$, $\sin(2x+2y)=\frac{\sqrt{8}-28\sqrt{5}}{81}$.

13.205. 15 ili 75 stupnjeva **13.206**. $\sin4x = -0{,}96$ **13.207**. $\cos4x = -0{,}28$

13.208.a) $\cos^2 15^0 - \sin^2 15^0 = \cos(2\cdot 15°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $2\sin 67°30'\cos 67°30' = \sin 135° = \sin(180°-45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\cos^2 22°30' - \sin^2 22°30' = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

13.209.a) $1-2\sin^2 15° = \cos^2 15° + \sin^2 15° - 2\sin^2 15° = \cos^2 15° - \sin^2 15° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\frac{tg15^0}{1-tg^2 15^0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2tg15^0}{1-tg^2 15^0} = \frac{1}{2}\cdot tg30^0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

c) $\frac{2\cos^2 15^0 - 1}{1-2\sin^2 22^0 30'} = \frac{2\cos^2 15^0 - \left(\cos^2 15^0 + \sin^2 15^0\right)}{\sin^2 22^0 30' + \cos^2 22^0 30' - 2\sin^2 22^0 30'} =$

$= \frac{\cos^2 15^0 - \sin^2 15^0}{\cos^2 22^0 30' - \sin^2 22^0 30'} = \frac{\cos 30^0}{\cos 45^0} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

13.210.a) $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = \sin 4$ b) $\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha = \cos 4\alpha$

c) $\cos^2 2\alpha$

d) $1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1-2(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1-2\sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha - 2\sin^2 2\alpha = \cos 2\alpha$.

13.211.a) -1 b) 1 c) -1

d) $\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1-2\sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha$

13.212.a) $\frac{\sin 10^0}{\sin 20^0} = \frac{\sin 10^0}{2\sin 10^0\cos 10^0} = \frac{1}{2\cos 10^0}$ b) $\frac{\sin 22^0}{\sin 44^0} = \frac{1}{2\cos 22^0}$

c) $2\cos 20°$ d) $\frac{1}{2\sin 3x}$

13.213.a) $\frac{\sin 10^0}{1-\cos 20^0} = \frac{\sin 10^0}{2\sin^2 10^0} = \frac{1}{2\sin 10^0}$ b) $\frac{1}{2\sin x}$

c) $\frac{\cos x}{1+\cos 2x} = \frac{\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2\cos x}$ d) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} = tgx$.

13.214.a) $2\cos 23^0\cos 67^0 = 2\cos(90°-67°)\cos 67° = 2\sin 67°\cos 67° = \sin 134° =$ $= \sin(180°-46°) = \sin 46°$.

b) $2\sin 70°\sin 20° = 2\cos 20°\sin 20° = \sin 40°$

c) $(\cos 70° - \cos 20°)(\cos 20° + \cos 70°) = -\cos 40°$. d) $\cos 10°$

13.215.a) $\sin 80^0$ b) $\frac{1}{8}$ c) $ctg10^0$ **13.216.**a) 1

b) $\frac{1-\sin\alpha}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} = 1$. c) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

13.217.a) $2\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{14} = 2\sin\frac{2\pi}{7}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{7}\right) = 2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} = \sin\frac{4\pi}{7}$. b) 1

13.218.a) $4\sin 18^0\cos 36^0 = \frac{4\sin 18^0\cos 18^0\cos 36^0}{\cos 18^0} = \frac{2\sin 36^0\cos 36^0}{\cos 18^0} =$

$= \frac{\sin 72^0}{\cos 18^0} = \frac{\sin(90^0-18^0)}{\cos 18^0} = \frac{\cos 18^0}{\cos 18^0} = 1$.

b) $\sin 70^0\sin 50^0\sin 10^0 = \cos 20^0\cos 40^0\sin 10^0 =$

$= \frac{2\sin 20^0\cos 20^0\cos 40^0\sin 10^0}{2\sin 20^0} = \frac{\sin 40^0\cos 40^0\sin 10^0}{2\sin 20^0} =$

$= \frac{\left(2\sin 40^0\cos 40^0\right)\sin 10^0}{4\sin 20^0} = \frac{\sin 80^0\sin 10^0}{4\sin 20^0} = \frac{2\cos 10^0\sin 10^0}{8\sin 20^0} = \frac{\sin 20^0}{8\sin 20^0} = \frac{1}{8}$.

13.219.a) $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x = 2\sin x\cos x\cos x + \cos^2 x\sin x - \sin^3 x$ $=$

$= 2\sin x\cos^2 x + \cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x =$
$= 3\sin x - 4\sin^3 x$.

b) $\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x =$
$= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin x\cos x\sin x = \cos x(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) -$
$2\sin^2 x\cos x =$
$= \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\cos x(1-\cos^2 x) = \cos x(2\cos^2 x - 1 - 2 + 2\cos^2 x) =$
$= \cos x(4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

13.220. $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$

$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha}{4\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha}{4\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin 4\alpha\cos 4\alpha}{8\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin 8\alpha}{16\sin\frac{\alpha}{2}}$

13.221.a) $\frac{tg^2\left(45^0+\alpha\right)-1}{tg^2\left(45^0+\alpha\right)+1} = \frac{\left(\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}\right)^3 - 1}{\left(\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}\right)^3 + 1} = \frac{\frac{(1+tg\alpha)^2 - (1-tg\alpha)^2}{(1-tg\alpha)^2}}{\frac{(1+tg\alpha)^2 + (1-tg\alpha)^2}{(1-tg\alpha)^2}} =$,

$= \frac{4tg\alpha}{2+2tg^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \sin 2\alpha$.

13.222. $tg\beta = \frac{3tg\alpha}{2}$, $tg(\beta-\alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1+tg\beta\, tg\alpha} = \frac{\frac{3tg\alpha}{2} - tg\alpha}{1+\frac{3tg\alpha}{2}\cdot tg\alpha} =$

$$= \frac{3tg\alpha-2tg\alpha}{2+3tg^2\alpha} = \frac{tg\alpha}{2+3tg^2\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2+3\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2+\frac{3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2+\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2+\left(\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}}\right)^2} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{4+1-\cos2\alpha} = \frac{\sin2\alpha}{5-\cos2\alpha}.$$

13.223.a) $\sin15^\circ = \sin\frac{30^0}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos30^0}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt3}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt3}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt3}}{2}.$

b) $\sin22^\circ30' = \sin\frac{45^0}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos45^0}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt2}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}.$

c) $\cos22^\circ30' = \cos\frac{45^0}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos45^0}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt2}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}.$

d) $tg22^\circ30' = tg\frac{45^0}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos45^0}{1+\cos45^0}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt2}{2}}{1+\frac{\sqrt2}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt2}{2+\sqrt2}} = \frac{2-\sqrt2}{\sqrt2} = \frac{2\sqrt2-2}{2} = \sqrt2-1.$

13.224.a) $\sin\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt2}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}.$

b) $\cos\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$ c) $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\frac{\pi}{6}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt3}}{2}.$

d) $tg\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt3$ e) $ctg\frac{\pi}{8} = ctg\frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt2}{2}}{1-\frac{\sqrt2}{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt2}{2-\sqrt2}} = \sqrt2+1$

13.225. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt5}{5}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt5}{5}$, $tg\frac{\alpha}{2} = -2.$

13.226. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $tg\frac{\alpha}{2} = 3.$

13.227. $\sin\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt3}}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt3}}}{2}$, $tg\frac{\pi}{24} = \frac{\sin\frac{\pi}{24}}{\cos\frac{\pi}{24}} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt3}}}{2}} =$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt3}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt3}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt3}}} = \frac{\sqrt{4-(2+\sqrt3)}}{2+\sqrt{2+\sqrt3}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt3}}{2+\sqrt{2+\sqrt3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt3}\left(2-\sqrt{2+\sqrt3}\right)}{\left(2+\sqrt{2+\sqrt3}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt3}\right)} = \frac{\sqrt{2-\sqrt3}\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt3}\right)}{2-\sqrt3} = \frac{\left(2-\sqrt{2+\sqrt3}\right)\sqrt{2+\sqrt3}}{\sqrt{2-\sqrt3}\cdot\sqrt{2+\sqrt3}} =$$

$$= \left(2-\sqrt{2+\sqrt3}\right)\sqrt{2+\sqrt3}, \qquad ctg\frac{\pi}{24} = \left(2+\sqrt{2+\sqrt3}\right)\sqrt{2+\sqrt3}.$$

13.228.a) $|\sin2\alpha|$ b) $\left|\cos\frac{\alpha}{8}\right|$ c) $\left|ctg\frac{\alpha}{12}\right|$

13.229.a) $\left|tg\frac{3x}{2}\right|$ b) $\left|ctg\frac{x}{2}\right|$ c) 1

13.230.a) $\sqrt{2+2\cos\alpha} = \sqrt{2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2\cos\frac{\alpha}{2}.$

b) $\sqrt{2(1+\sin2\alpha)} = \sqrt{2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2} = \sqrt2|\sin\alpha+\cos\alpha| = 2\left|\frac{\sqrt2}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt2}{2}\cos\alpha\right| =$

$$= 2\left|\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha\right| = 2\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

13.231.a) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos4x}} = \sqrt{2+\sqrt{2\cos^2 2x+2\sin^2 2x+2\cos^2 2x-2\sin^2 2x}} =$

$$= \sqrt{2+\sqrt{4\cos^2 2x}} = \sqrt{2+2|\cos2x|} = \sqrt{2\sin^2 x+2\cos^2 x+\left|2\cos^2 x-2\sin^2 x\right|} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{4\cos^2 x}, \ 0\le x\le\frac{\pi}{4} = 2\cos x, \ 0\le x\le\frac{\pi}{4} \\ \sqrt{4\sin^2 x}, \ \frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2} = 2\sin x, \ \frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

b) $\cos^2x$, $x\in(2k\pi, \pi+2k\pi)$, $k\in Z$.

13.232.a) $\sin\frac{\pi}{16} = \sin\frac{\frac{\pi}{8}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\frac{\pi}{4}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt2}{2}}{2}}}{2}} =$

$$= \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{4}}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt2}}}{2}.$$

c) $$\cos\frac{\pi}{32} = \cos\frac{\frac{\pi}{16}}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{16}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}}{2}}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt2}{2}}{2}}}{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt2}{2}}{2}}}{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}}{2}}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt2}}{2}}{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt2}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt2}}}}{2}.$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\frac{\pi}{32} = \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt2}}}{4}.$$

13.233.a) $\frac{1-\cos x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = 2\sin\frac{x}{2}.$ b) $ctg\frac{x}{2}$

c) $\frac{1+\cos2x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x} = \frac{2\cos^2 x}{\cos x} = 2\cos x$ d) $tg^2\frac{x}{4}$

13.234.a) $$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{2\sin\frac x2\cos\frac x2}{\cos^2\frac x2}}{\frac{\cos^2\frac x2}{\cos^2\frac x2}+\frac{\sin^2\frac x2}{\cos^2\frac x2}} = \frac{\frac{2\sin\frac x2}{\cos\frac x2}}{1+\frac{\sin^2\frac x2}{\cos^2\frac x2}} = \frac{2tg\frac x2}{1+tg^2\frac x2}$$

b) $$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2\frac x2-\sin^2\frac x2}{\cos^2\frac x2+\sin^2\frac x2} = \frac{\frac{\cos^2\frac x2-\sin^2\frac x2}{\cos^2\frac x2}}{\frac{\cos^2\frac x2}{\cos^2\frac x2}+\frac{\sin^2\frac x2}{\cos^2\frac x2}} = \frac{1-\frac{\sin^2\frac x2}{\cos^2\frac x2}}{1+\frac{\sin^2\frac x2}{\cos^2\frac x2}} = \frac{1-tg^2\frac x2}{1+tg^2\frac x2}$$

c) $$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\sin\frac x2\cos\frac x2}{\cos^2\frac x2-\sin^2\frac x2} = \frac{\frac{2\sin\frac x2\cos\frac x2}{\cos^2\frac x2}}{\frac{\cos^2\frac x2}{\cos^2\frac x2}-\frac{\sin^2\frac x2}{\cos^2\frac x2}} = \frac{\frac{2\sin\frac x2}{\cos\frac x2}}{1-\frac{\sin^2\frac x2}{\cos^2\frac x2}} = \frac{2tg\frac x2}{1-tg^2\frac x2}.$$

d) $$ctgx = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2\frac x2-\sin^2\frac x2}{2\sin\frac x2\cos\frac x2} = \frac{\frac{\cos^2\frac x2-\sin^2\frac x2}{\cos^2\frac x2}}{\frac{2\sin\frac x2\cos\frac x2}{\cos^2\frac x2}} = \frac{1-\frac{\sin^2\frac x2}{\cos^2\frac x2}}{\frac{2\sin\frac x2}{\cos\frac x2}} = \frac{1-tg^2\frac x2}{2tg\frac x2}.$$

13.235. 8

13.236.a) $\frac{2\sin x-\sin2x}{2\sin x+\sin 2x} = \frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{2\sin x+2\sin x\cos x} = \frac{2\sin x(1-\cos x)}{2\sin x(1+\cos x)} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = tg^2\frac x2.$

b) $$\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x} = \frac{1+\frac{2tg\frac x2}{1+tg^2\frac x2}-\frac{1-tg^2\frac x2}{1+tg^2\frac x2}}{1+\frac{2tg\frac x2}{1+tg^2\frac x2}+\frac{1-tg^2\frac x2}{1+tg^2\frac x2}} = \frac{1+tg^2\frac x2+2tg\frac x2-1+tg^2\frac x2}{1+tg^2\frac x2+2tg\frac x2+1-tg^2\frac x2} =$$

$$= \frac{2tg^2\frac x2+2tg\frac x2}{2+2tg\frac x2} = \frac{2tg\frac x2\left(tg\frac x2+1\right)}{2(1+tg\frac x2)} = tg\frac x2.$$

c) $tg\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}ctgx=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{\cos x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+\frac{\sin\frac{x}{2}\cos x}{\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}(1+\cos x)}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x.$$

d) $\frac{\sqrt{2}-\cos x-\sin x}{\sin x-\cos x}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos\left(x-45^0\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x-45^0\right)}=$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(1-\cos\left(x-45^0\right)\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x-45^0\right)}=\frac{2\sin^2\frac{x-45^0}{2}}{2\sin\frac{x-45^0}{2}\cos\frac{x-45^0}{2}}=tg\frac{x-45^0}{2}$$

13.237. $\sin\alpha(\sin\alpha+\sin\beta)+\cos\alpha(\cos\alpha+\cos\beta)=\sin^2\alpha+\sin\alpha\sin\beta+\cos^2\alpha+\cos\alpha\cos\beta$

$$=1+\cos(\alpha-\beta)=1+\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

13.238. $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=$

$$=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=$$

$$=1+1-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)=$$

$$=2-2\left(\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=2-2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$=2\left(1-\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

13.239.a) $tg\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\frac{2\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\right)^2}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$,

ili $tg\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1+\cos x)(1-\cos x)}}=\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}}=\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$.

b) $tg\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}}=\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}=\sqrt{\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

13.240. $\cos^4\frac{\pi}{8}+13\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=$

$$=\cos^4\frac{\pi}{8}+13\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)=$$

$$=\cos^4\frac{\pi}{8}+13\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}=$$

$$=\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2-2\cos^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\pi}{8}+13\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)^2-2\sin^2\frac{3\pi}{8}\cos^2\frac{3\pi}{8}=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+13\cdot\frac{2}{4}+1-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)^2=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}+\frac{13}{2}+1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}=8.$$

13.241.a) $tg15^0+ctg15^0=$

$$=\frac{\sin 15^0}{\cos 15^0}+\frac{\cos 15^0}{\sin 15^0}=\frac{\sin^2 15^0+\cos^2 15^0}{\sin 15^0\cos 15^0}=\frac{2}{2\sin 15^0\cos 15^0}=\frac{2}{\sin 30^0}=4$$

b) $ctg\frac{\pi}{8}-tg\frac{\pi}{8}=\frac{1}{tg\frac{\pi}{8}}-tg\frac{\pi}{8}=\frac{1-tg^2\frac{\pi}{8}}{tg\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{\frac{tg\frac{\pi}{8}}{1-tg^2\frac{\pi}{8}}}=\frac{2}{tg\frac{\pi}{4}}=2.$

13.242.* $tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}+\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}=$

$$=\frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}}+\frac{1-\frac{b}{a+c}}{1+\frac{b}{a+c}}+\frac{1-\frac{c}{a+b}}{1+\frac{c}{a+b}}=\frac{b+c-a}{b+c+a}+\frac{a+c-b}{a+c+b}+\frac{a+b-c}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

12.243. $\frac{1-\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}=$

$$=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}=\frac{\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}=$$

$$= \frac{1-\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} = \frac{1-tg\frac{x}{2}}{1+tg\frac{x}{2}} = \frac{tg\frac{\pi}{4}-tg\frac{x}{2}}{tg\frac{\pi}{4}+tg\frac{x}{2}} = tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

13.244. $$\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}} = \frac{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)} =$$

$$= \frac{2+2\sqrt{1-\sin^2 x}}{2\sin x} = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = ctg\frac{x}{2}.$$

L I T E R A T U R A :

1. Abramovič,M.I.,Starodubcev M.T.:MATEMATIKA-algebra i elementarne funkcije, "Visšaja škola", Moskva, 1976.
2. Alekseev V.M.:ELEMENTARNA MATEMATIKA-rešenie zadač, "Viša škola", Kiev, 1989.
3. Antonov M.P.,Vigodski M.J.,Nikitin V.V.,Saankin A.I.:ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEMENTARNE MATEMATIKE, Zavod za izdavanje udžbenika,Sarajevo, 1972.
4. Bogoslavov T.V.:Zbirka zadataka iz matematika 2, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1989.
5. Bračković M.,Demirdžić I.:ELEMENTARNA MATEMATIKA za kvalifikacione i prijemne ispite, Mašinski fakultet Univerziteta u Sarajevu, 1987.
6. Dakić Branimir:MATEMATIKA 2 - zbirka zadataka za drugi razred gimnazije, "Školska knjiga", Zagreb, 1994.
7. Hadžiaganović A.: ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE Odabrana poglavlja za nadarene učenike srednjih škola "GRIN" Gračanica,2000.
8. Huskić A. MATEMATIKA za drugi razred gimnazije, Tešanj, 1996.
9. Ivović M.Ž.,Milošević V.M.:ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE sa zadacima za takmičenja i prijemne ispite na fakultetima, za 3. razred gimnazije prirodno-matematičkom smera, ICS, Beograd, 1974.
10. Kurepa S.,Kurepa A:MATEMATIKA 2 za drugi razred gimnazije,"Šk.k",Zagreb,1994
11. MATEMATIČKO FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola (XX-XLI), Zagreb
12. Mihailović Vojislav: GEOMETRIJA za II razred gimnazije prirodno-matematičkog smera, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva Srbije,Beograd, 1972.
13. Mihailović Vojislav: Zbirka rešenih zadataka iz geometrije za II razred gimnazije, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva Srbije, Beograd, 1977.
14. Milin L.,Ivanović Ž.:ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ TRIGONOMETRIJE SA ZADACIMA ZA TAKMIČENJA I PRIJEMNE ISPITE NA FAKULTETIMA, "Naučna knjiga", Beograd, 1984.
15. Milin L.,Ivanović Ž.,Ognjenović S.:MATEMATISKOP 4 – zbirka zadataka za drugi razred, "Naučna knjiga", Beograd,1988.
16. Mintaković Stjepan:ZBIRKA ZADATAKA IZ TRIGONOMETRIJE Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo, 1971.
17. Mintaković Stjepan:ZBIRKA ZADATAKA ALGEBRE 2, Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo, 1968.
18. Mintaković Stjepan:ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE za drugi razred srednjih škola, IGKRO "Svjetlost"-OOUR Zavod za udžbenike, Sarajevo, 1977.
19. Stefanović R.,D.Stefanović:Zbirka zadataka iz algebre- sa uputama,rešenjima i rezultatima- za drugi razred gimnazije, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva Srbije, Beograd 1972.
20. Šnajder M.,Tomić S.:Metodička zbirka zadataka iz matematike za srednje škole, "Svjetlost" zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Sarajevo, 1981.
21. TRIANGLE –matematički časopis za učenike i nastavnike osnovnih i srednjih škola Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo 1997.-1999.
22. Živković R.,Fatkić H.,Stupar Z.:ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE sa rješenjima uputama i rezultatima , "Svjetlost" zavod za udžbenike i nastavna sredstva Sarajevo, 1987.

S A D R Ž A J